BASILEA II

-Acerca de los parámetros implícitos en la fórmula

-Utilización del modelo de Basilea II en titulizaciones

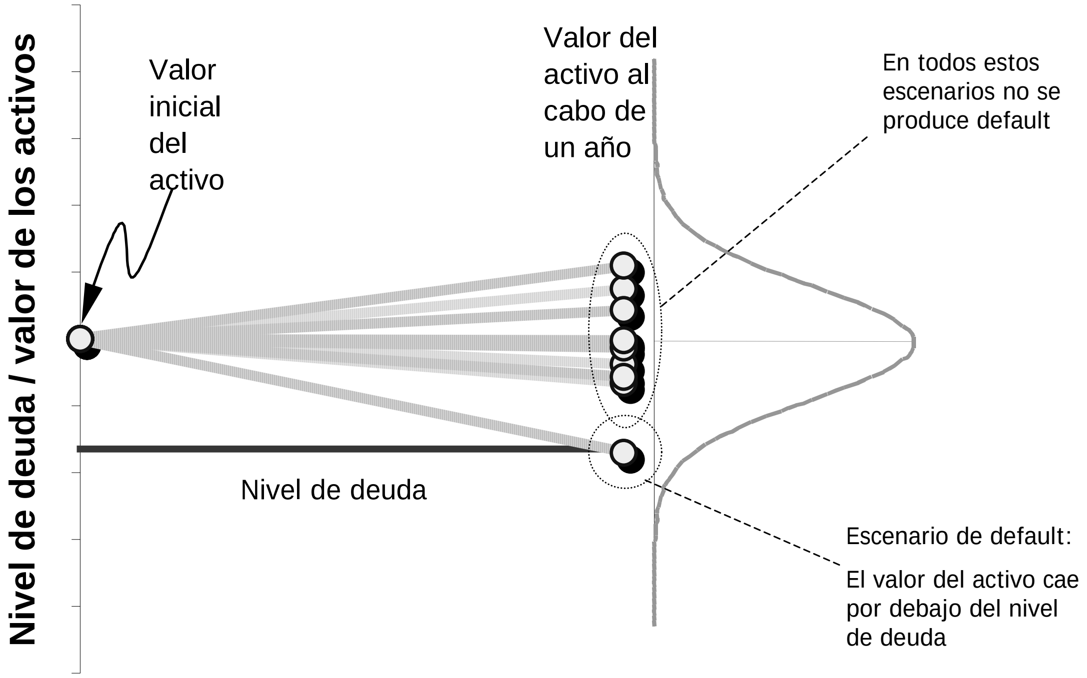
Junio de 2.003, documentación elaborada por Juan Carlos García Céspedes

INTRODUCCIÓN:

RECORDATORIO DE BASILEA 2

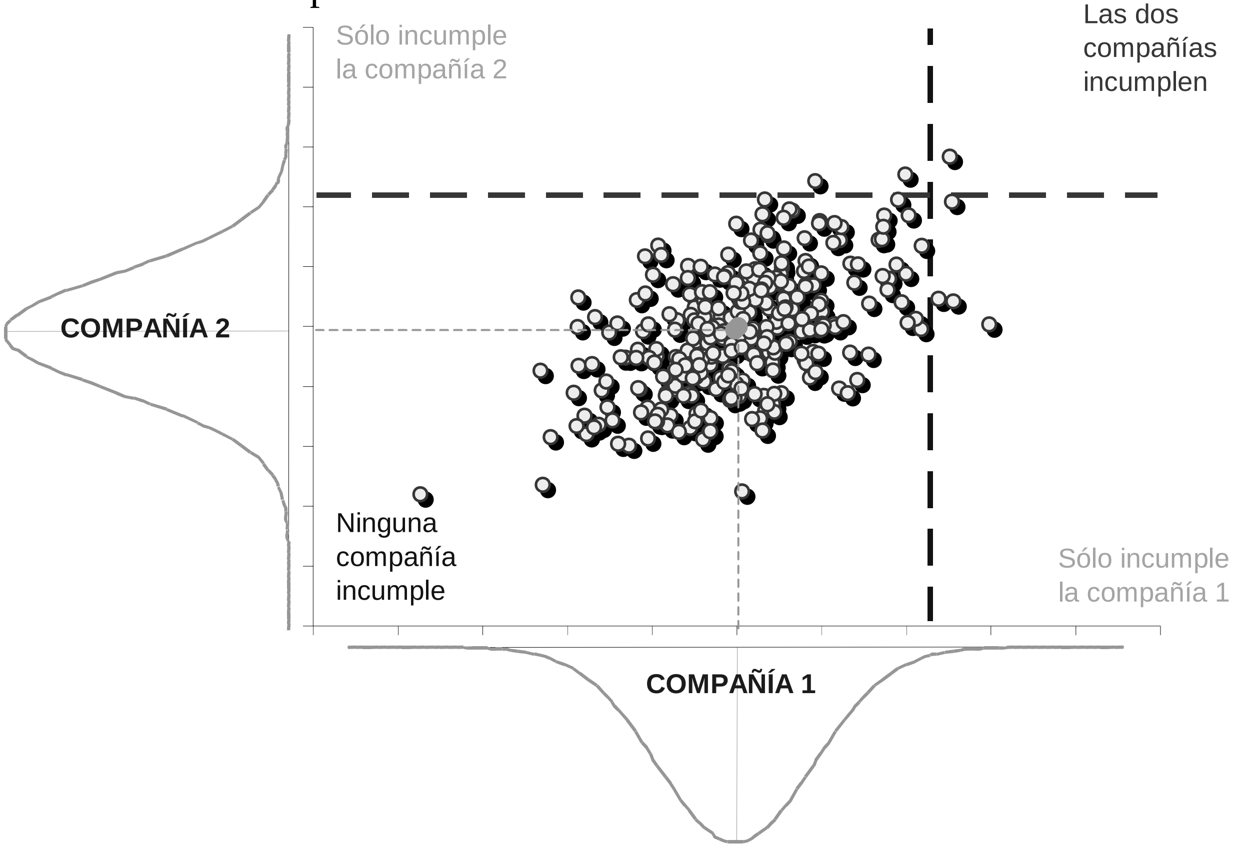
1-. El modelo de Merton de crédito

El default de una compañía se produce cuando el valor de sus activos cae por debajo del nivel de su deuda. Ni liquidando todos sus activos podría repagar la deuda.

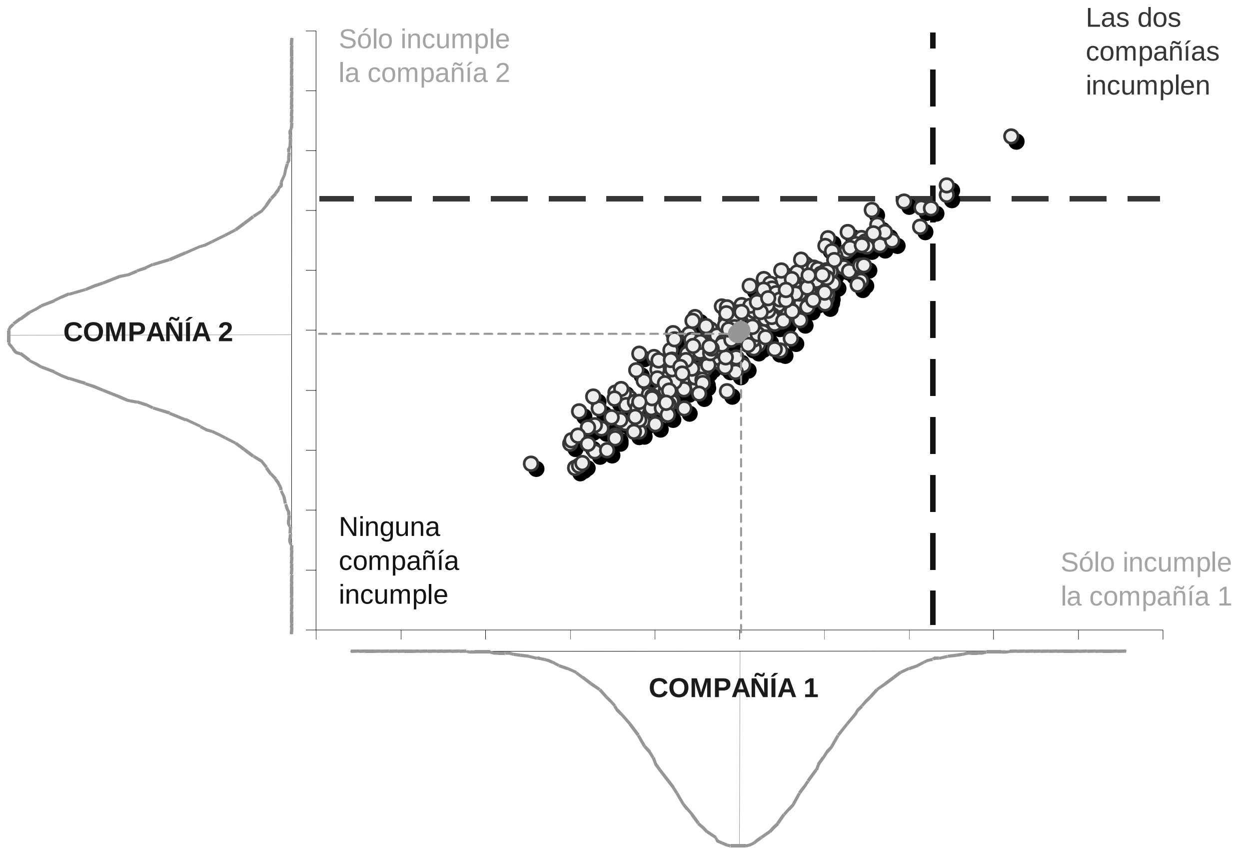


Es fácil visualizar el modelo de Merton para dos contrapartidas.

La correlación entre los defaults viene determinada por la correlación entre los activos de las compañías...



Cuanto mayor es la correlación entre los activos de las compañías mayor es la probabilidad de default conjunto y mayor es por tanto la correlación entre los defaults.



2.-El modelo de BIS II

Es una aproximación inspirada en el "modelo de Merton" donde:

- El número de contrapartidas en el portfolio "n" tiende a infinito
- El tamaño de las exposiciones de todas las contrapartidas es igual a "1/n", y por tanto tiende a cero.
- Todas las contrapartidas tienen igual probabilidad individual de incumplimiento, *p*.
- El valor de los activos de todas las compañías sigue un proceso gaussiano, i.i.d.:

$$V_i = \sqrt{\rho} \cdot f + \sqrt{1-\rho} \cdot \xi_i$$

donde "f" es un factor común a todas las compañías (modelo unifactorial)

- La correlación entre los activos de todas las contrapartidas es igual a ρ

En este contexto, existe formula cerrada para la distribución de los defaults

La formula de la distribución acumulada de defaults es

$$F(x) = P[X \le x] = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(\sqrt{1-\rho} \cdot \Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(p) \right) \right)$$

Donde:

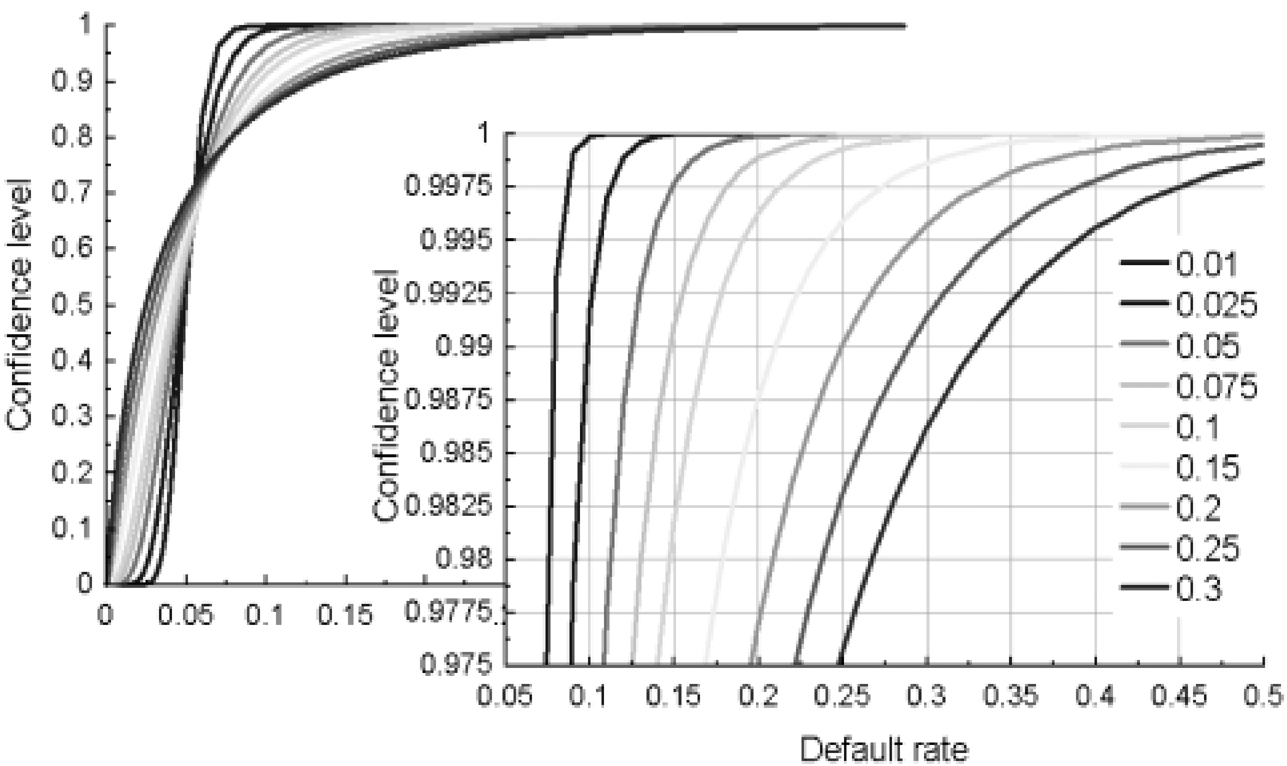
- $\Phi(\cdot)$ es la distribución normal estándar acumulada
- $\Phi^{-1}(\cdot)$ es la distribución normal estándar inversa
- ρ es la correlación de activos
- p es la probabilidad individual de incumplimiento

Derivando la expresión anterior se obtiene la formula de la densidad de defaults:

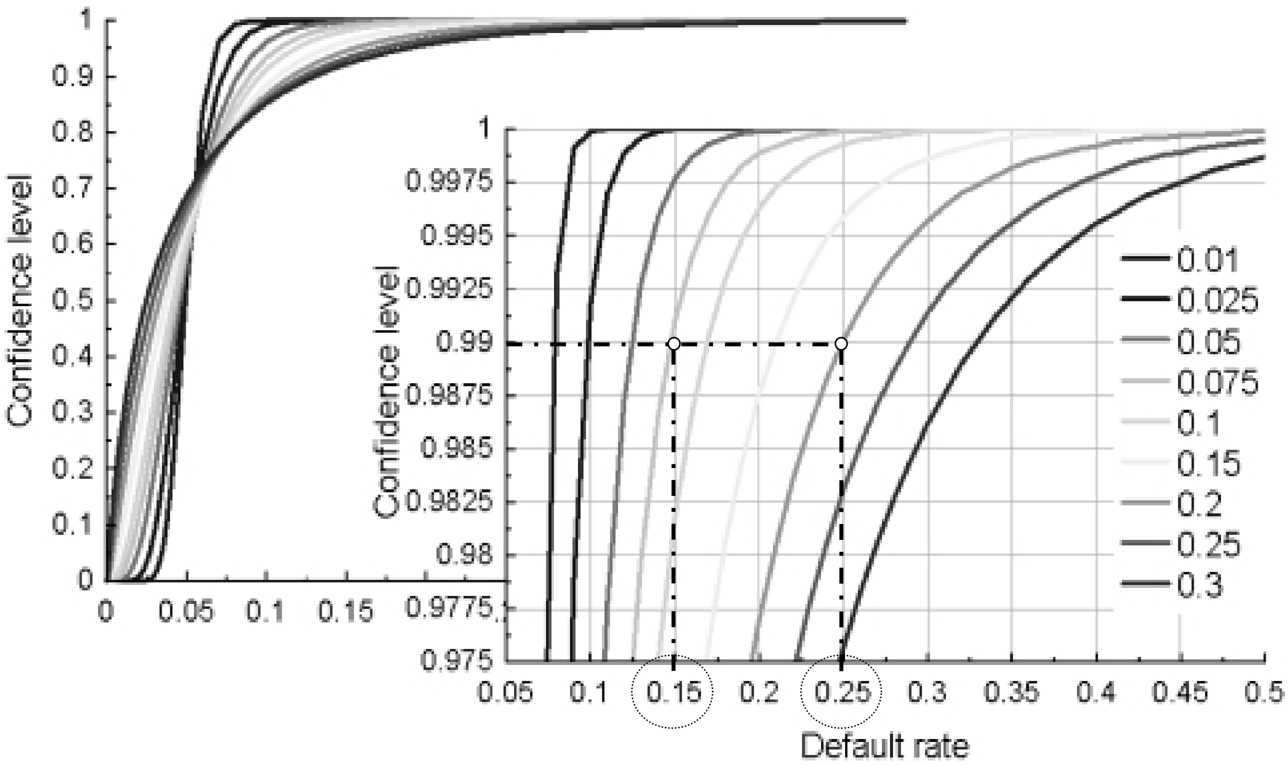
$$f(x) = \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \cdot \exp\left\{ \frac{1}{2} \cdot \left(\Phi^{-1}(x) \right) - \frac{1}{2 \cdot \rho} \left[\Phi^{-1}(p) - \sqrt{1-\rho} \cdot \Phi^{-1}(x) \right]^2 \right\}$$

El "truco" para llegar a las fórmulas anteriores estriba en condicionar los defaults a la realización del factor y utilizar la ley de las esperanzas iteradas.

La distribución acumulada mide el capital. El capital no es más que un determinado percentil de la distribución de defaults.

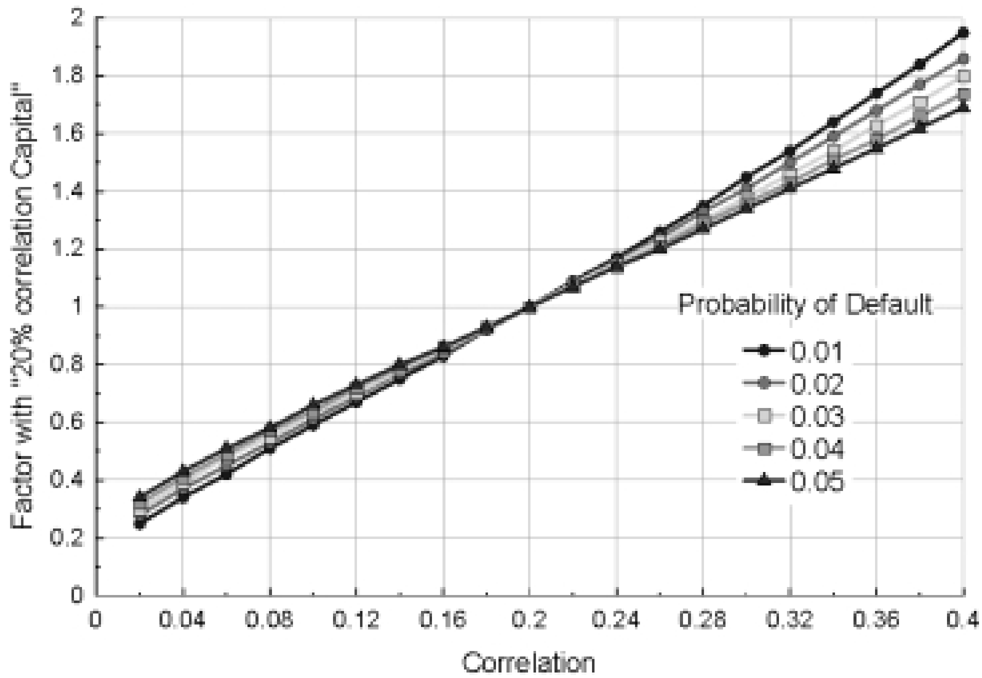


Por ejemplo, el percentil 99% con una correlación de activos del 7,5% implica una tasa de defaults del 15%, mientras que el mismo percentil para una correlación del 20% supone una tasa de defaults del 25%.



El impacto de la correlación en los percentiles de la distribución (y por tanto en el capital) es importante.

Por ejemplo pasar de una correlación del 20% al 8% prácticamente es dividir por 2 el percentil.



4.- La fórmula de Capital en BIS II

BIS II utiliza como base el modelo antes descrito, el capital se calcula para un nivel de confianza del 99,5%, con una correlación de activos del 20% y suponiendo que el “Loss Given Default” (LGD) es constante.

Adicionalmente, existen dos factores, uno que capta el efecto del plazo y otro que determina el anclaje, y que no serán objeto de análisis en esta presentación

$$Capital\ Regulatorio \propto LGD \cdot \Phi\left(\sqrt{\frac{1}{1-\rho}} \cdot \Phi^{-1}(p) - \sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}} \Phi^{-1}(Q) \right) =$$

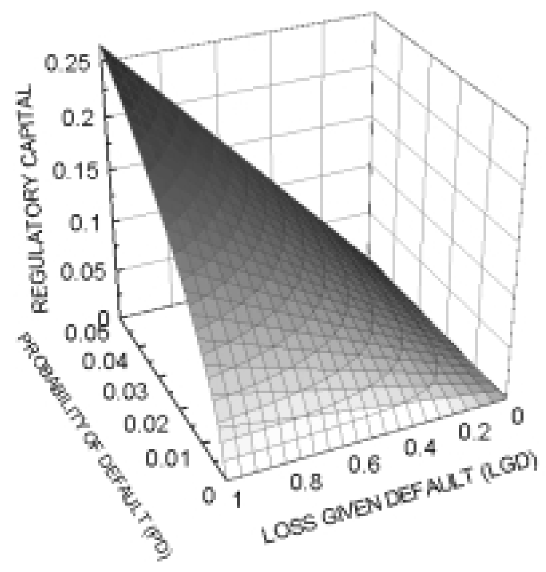
$$= LGD \cdot \Phi\left(\sqrt{\frac{1}{1-0.2}} \cdot \Phi^{-1}(p) - \sqrt{\frac{0.2}{1-.2}} \Phi^{-1}(.995) \right) =$$

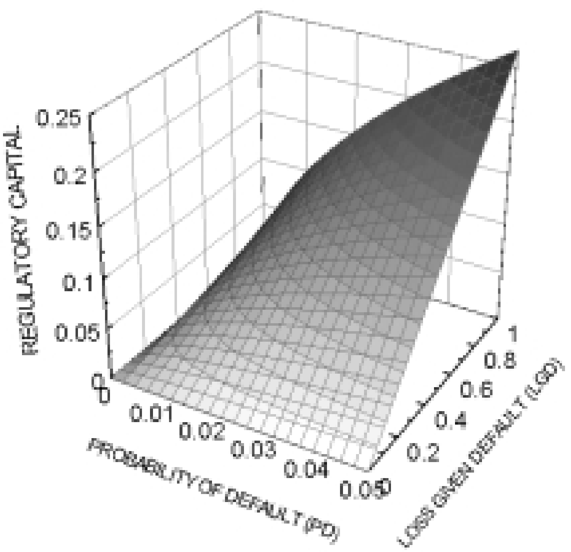
$$= LGD \cdot \Phi\left(1.118 \cdot \Phi^{-1}(p) - 1.288\right)$$

5.- El impacto de la LGD

$$\text{Capital Regulatorio} \propto LGD \cdot \Phi\left(1.118 \cdot \Phi^{-1}(p) - 1.288\right)$$

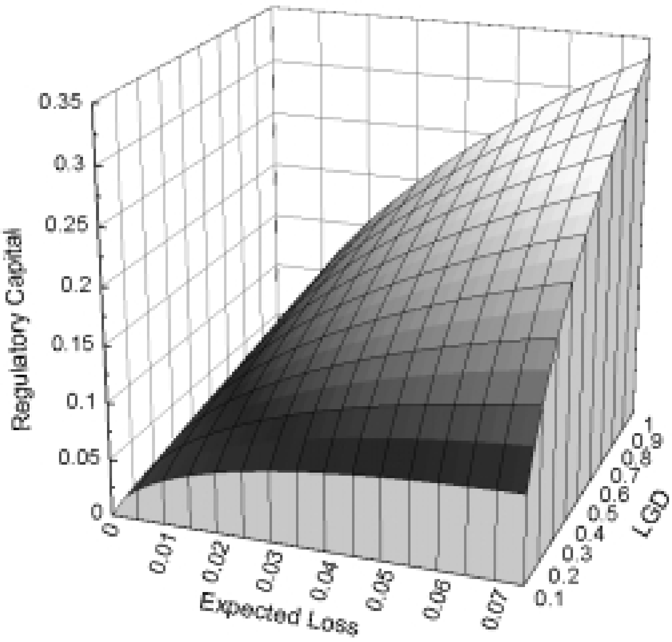
Si se representa la ecuación anterior se obtienen las figuras siguientes, este es el núcleo de la propuesta de BIS II:





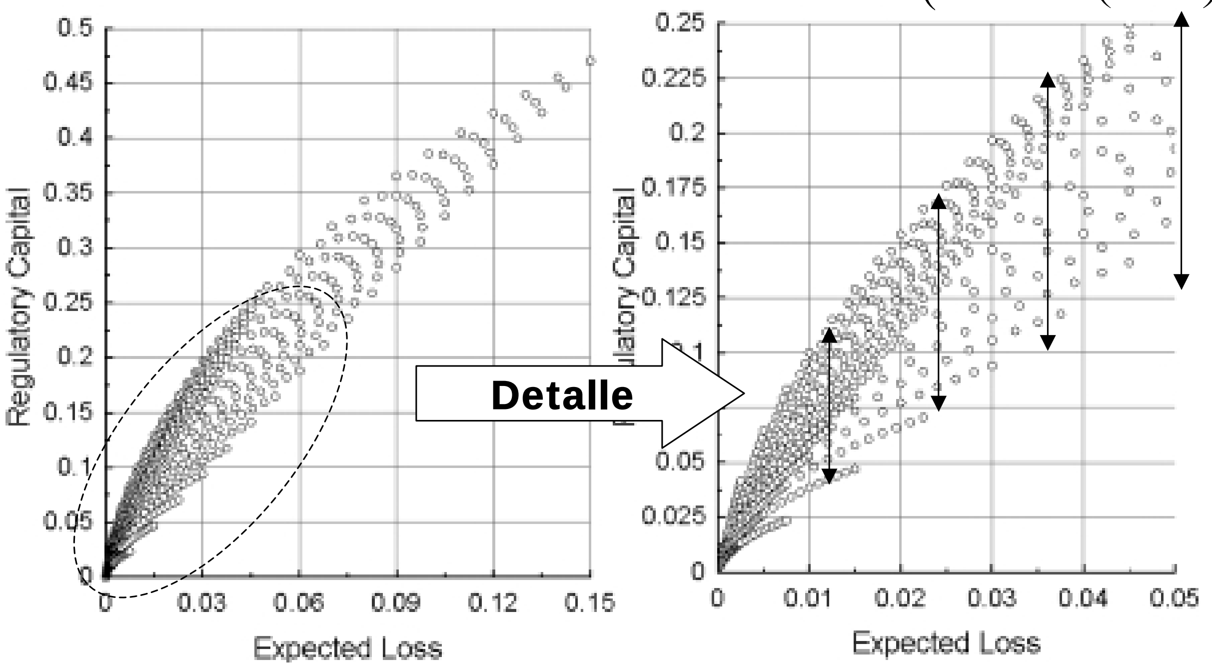
Es posible obtener la función de capital para distintos valores de LGD.

$$Capital\ Regulatorio = LGD \cdot \Phi\left(1.118 \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{EL}{LGD}\right) - 1.288\right)$$



Una circunstancia interesante de BIS II es que dado que el capital, para un mismo nivel de pérdida esperada, pueda ser diferente, dependiendo del valor de la LGD A igual pérdida esperada, una menor LGD da lugar a menores requerimientos de capital.

$$\text{Capital Regulatorio} \propto LGD \cdot \Phi\left(1.118 \cdot \Phi^{-1}(p) - 1.288\right) = LGD \cdot \Phi\left(1.118 \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{EL}{LGD}\right) - 1.288\right)$$



El modelo de Basilea II tiene (entre otros muchos) dos supuestos básicos que determinan en gran medida los requerimientos de capital:

- La correlación de activos: supuesto del 20% para empresas
- El supuesto de modelo unifactorial

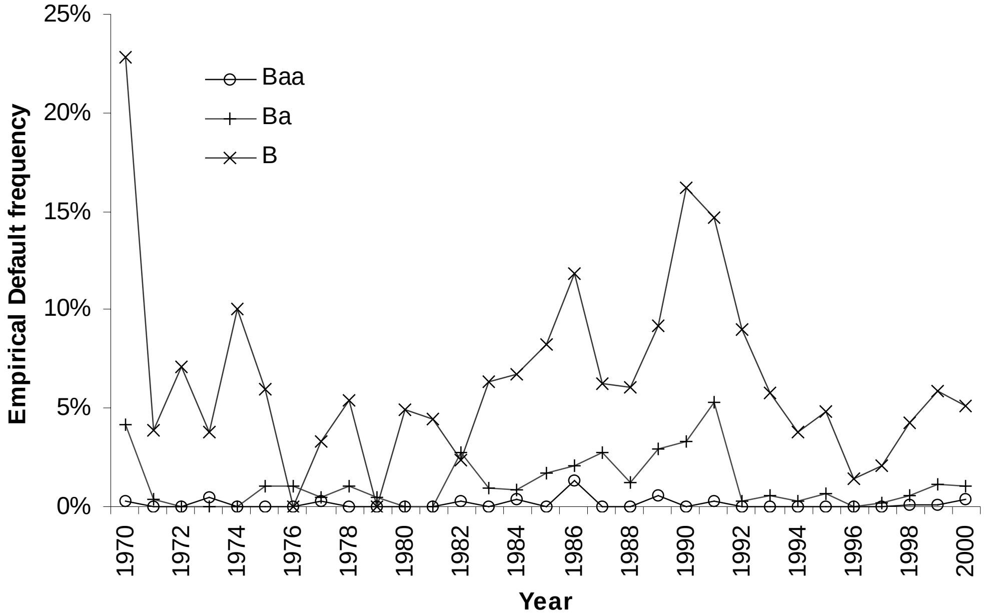
Sería muy interesante determinar empíricamente la validez de dichos supuestos o al menos acotar su impacto en el consumo de capital.

EL PRIMER PARAMETRO DE BASILEA 2

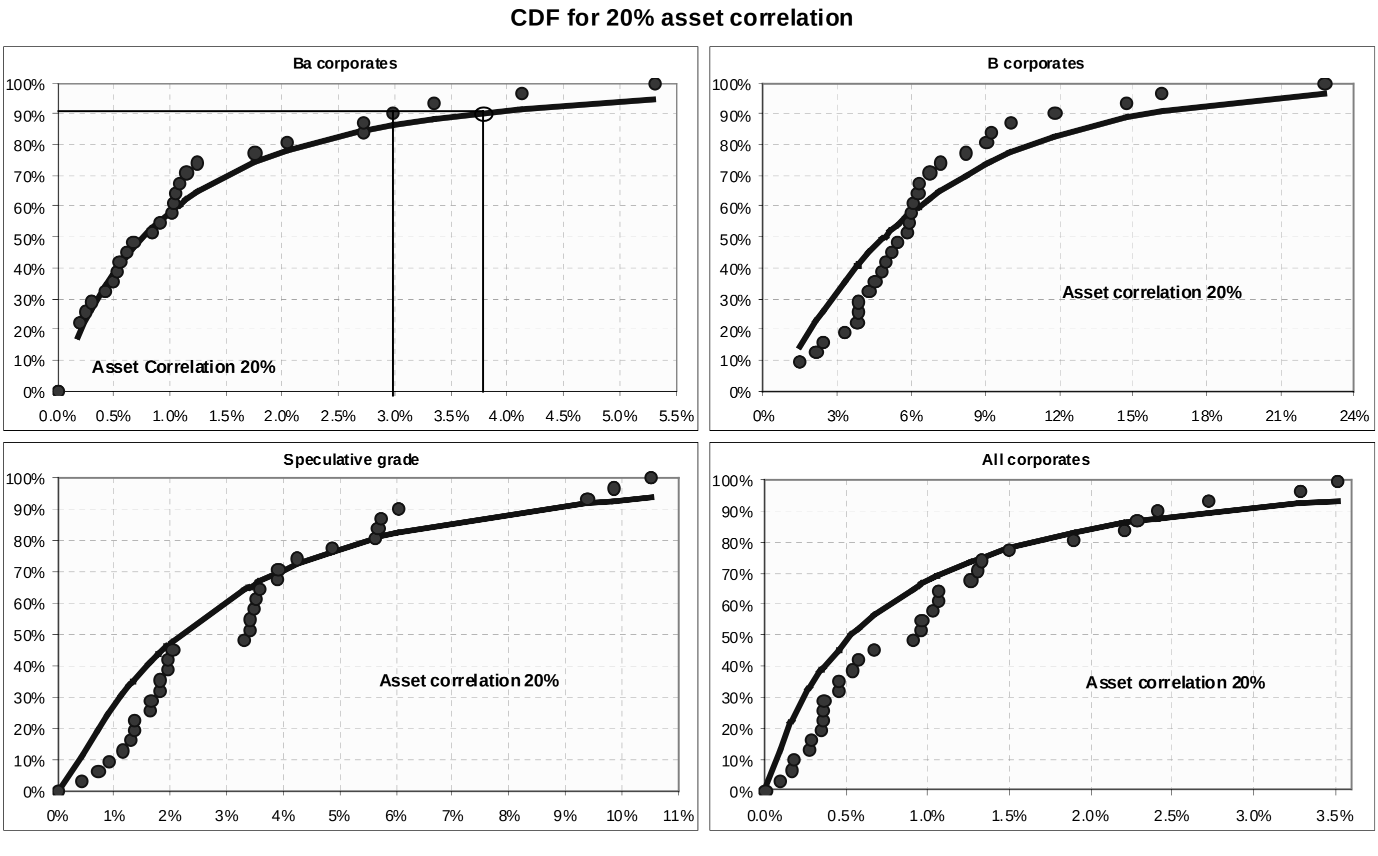
LAS CORRELACIONES DE ACTIVOS

6-. La Correlación de activos: estimaciones

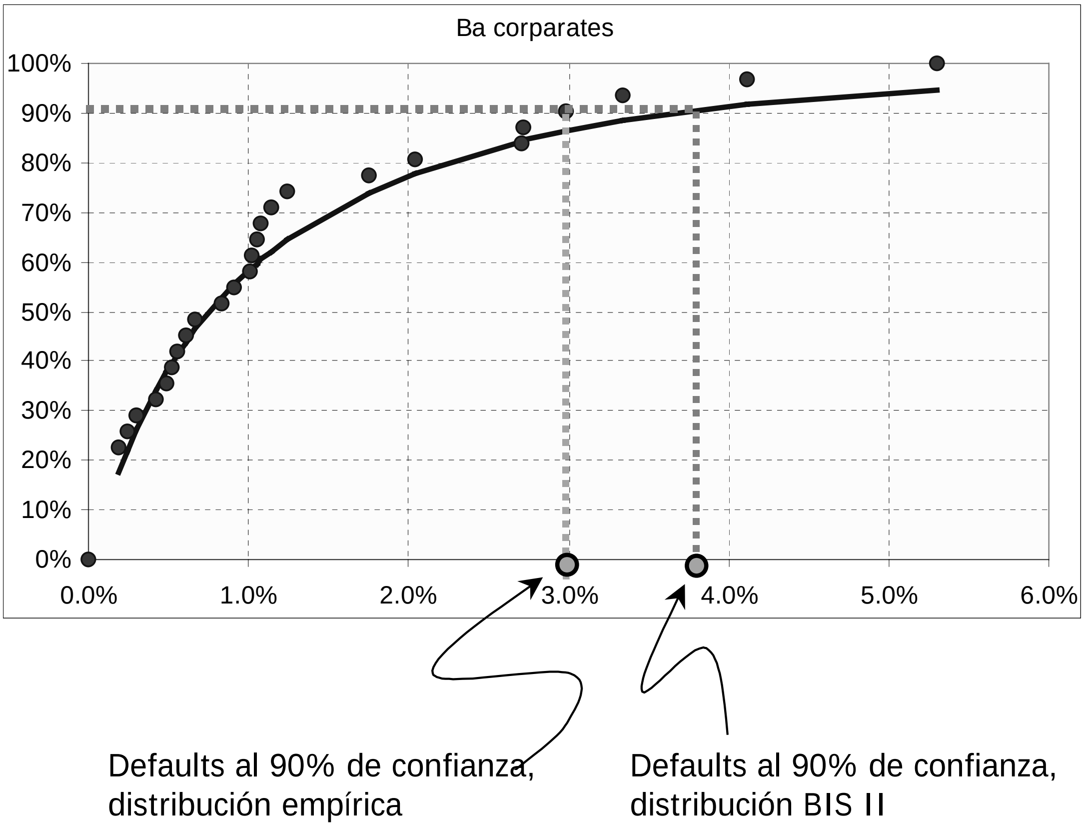
Es complicado contrastar empíricamente el supuesto de correlación implícito en la propuesta por Basilea dada la poca disponibilidad de datos. Sin embargo es posible hacer algún ejercicio utilizando datos de agencias de rating. El gráfico presenta las tasa de default desde 1970 hasta hoy para los grados Baa, Ba y B de Moodys.



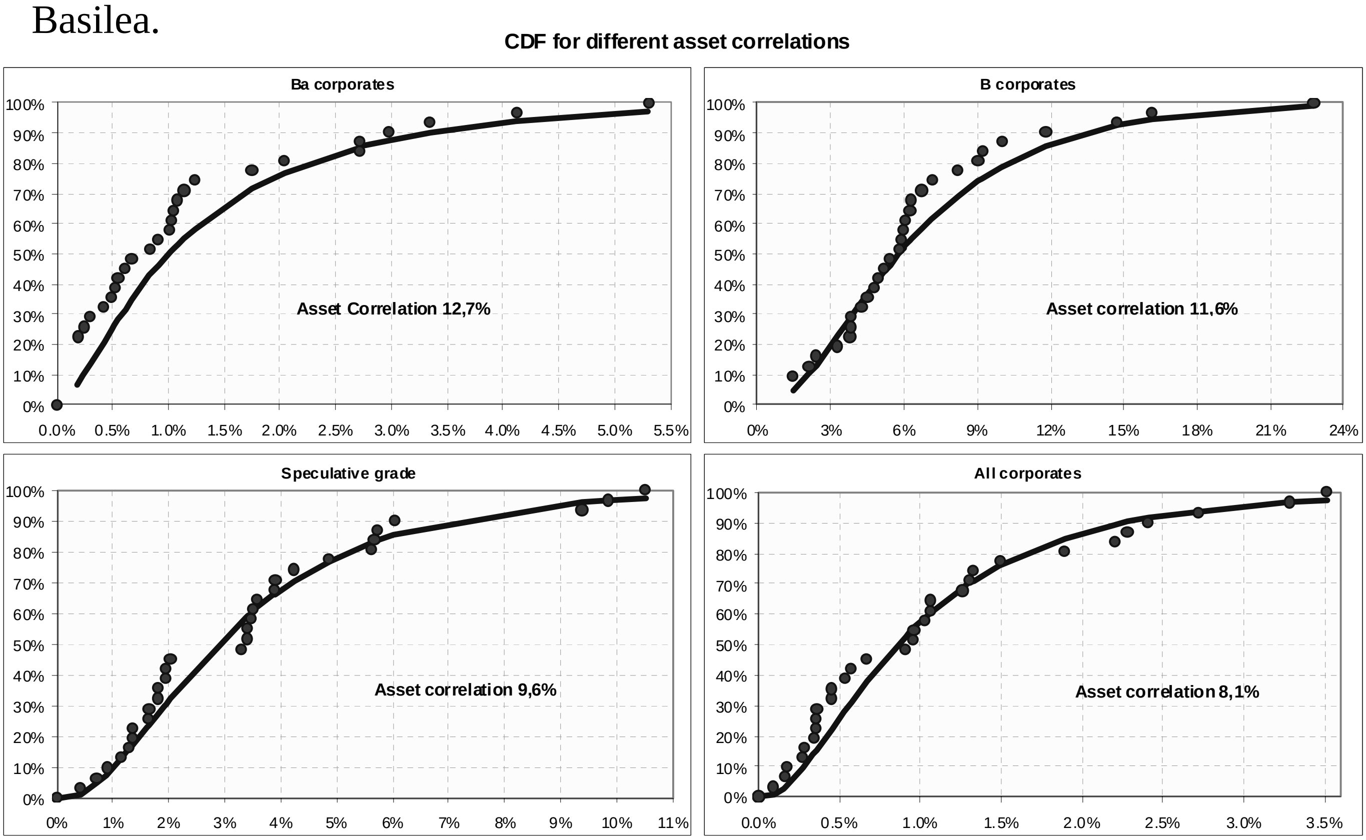
Se puede obtener la distribución acumulada empírica de defaults y compararla con la propuesta por Basilea



La **conclusión es que la distribución propuesta por Basilea sobreestima el riesgo**, en la realidad las tasas de default en las colas son menores.



Un ejercicio interesante es estimar la correlación de activos implcita en los datos empíricos. Dicha correlación está en el entorno al 10% frente al propuesto 20% de Basilea.



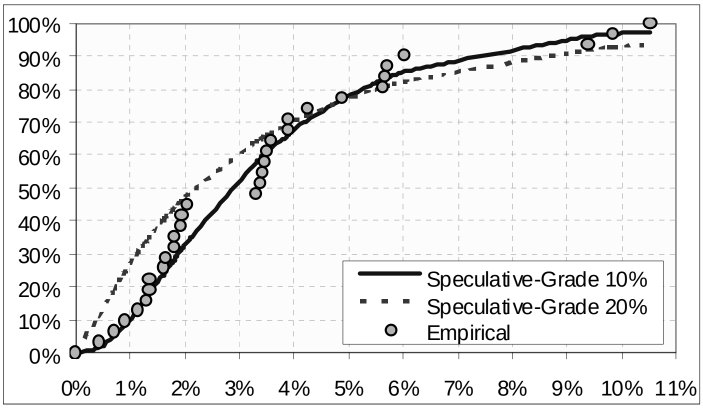
Los gráficos siguientes presentan:

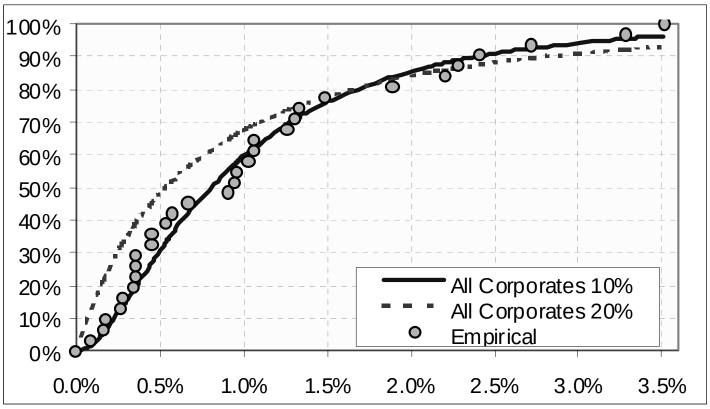
-las distribución acumulada empírica

-la propuesta por Basilea (con correlación del 20%)

- la curva que resultaría utilizando una correlación del 10%.

El ajuste con correlación del 10% es claramente mejor en todos los percentiles, incluidos los percentiles por encima del 80%.





7-. Una extensión: modelo bifactorial

En relación al uso de un modelo unifactorial y su impacto en el consumo de capital se ha desarrollado un modelo bifactorial para poder así estudiar las diferencias respecto del modelo unifactorial.

Para visualizar el modelo se puede pensar en los siguientes términos:

•Se supone que existen dos economías-países, cada una de ellas dirigida por un único factor, e interrelacionadas a través de la correlación entre dichos factores (para visualizar el modelo, podría pensarse que el factor fuese el PIB de cada una de las economías-países).

•Existen dos tipos de empresas, de manera que el valor de los activos que toma cada una de las empresas depende del factor (de nuevo piénsese en el PIB) específico de la economía-país a la que pertenece

En la economía existen, por tanto, dos tipos de contrapartidas (una por cada economía-país):

- Las contrapartidas de tipo 1, todas con igual probabilidad de incumplimiento p_1 e igual correlación de activos ρ_1. El valor de sus activos está afectado sólo por el factor 1 (f_1).

- Las contrapartidas de tipo 2, todas con igual probabilidad de incumplimiento p_2 e igual correlación de activos ρ_2,. El valor de sus activos está afectado sólo por el factor 2 (f_2).

Relación entre factores

$$f_2 = \rho_F \cdot f_1 + \sqrt{1-\rho_F^2} \cdot \zeta$$

$$\rho_F = corr(f_1, f_2)$$

Valor de las empresas

$$V_1^i = \sqrt{\rho_1} \cdot f_1 + \sqrt{1-\rho_1} \cdot \xi_1^i \qquad V_2^j = \sqrt{\rho_2} \cdot f_2 + \sqrt{1-\rho_2} \cdot \xi_2^j$$

La distribución de defaults en este contexto no tiene solución analítica como en el caso unifactorial

Es necesario resolver la doble integral siguiente.

$$F(x) = \iint_{\Omega} \phi(y_1, y_2) \cdot dy_1 \cdot dy_2$$

$$\Omega = \{(y_1, y_2)\} \;\; s.a. \;\; n_1 \cdot \Phi\left(\frac{K_1 - \sqrt{\rho_1} \cdot y_1}{\sqrt{1-\rho_1}}\right) + n_2 \cdot \Phi\left(\frac{K_2 - \sqrt{\rho_2} \cdot y_2}{\sqrt{1-\rho_2}}\right) \leq x$$

Dicha integral se puede resolver mediante métodos numéricos.

A fin de ver con números el impacto de utilizar un modelo unifactorial versus otro bifactorial, se han realizado algunas simulaciones para las que se ha supuesto:

- p_1: Probabilidad de incumplimiento de las contrapartidas afectadas por el factor 1 (contrapartidas de tipo 1): 1%
- p_2: Probabilidad de incumplimiento de las contrapartidas afectadas por el factor 2 (contrapartidas de tipo 2): 3%
- n_1: Porcentaje de contrapartidas de tipo 1: varía entre 0% y 100%
- $n_2 = 1 - n_1$: porcentaje de contrapartidas de tipo 2: varía entre 0% y 100%
- ρ_1: Correlación de activos de las contrapartidas de tipo 1: 20% (*)
- ρ_2: correlación de activos de las contrapartidas de tipo2: 20% (*)
- ρ_f: Correlación entre el factor 1 y el factor 2: varía entre 0% y 100%

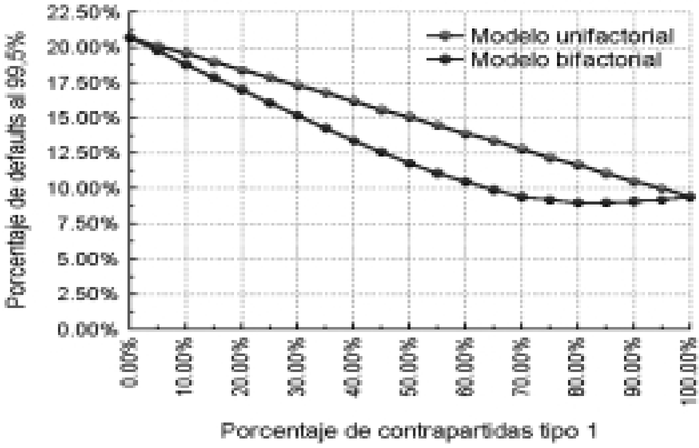
(*) Para ser consistentes con el supuesto de BISII

Simulación: sensibilidad a la estructura de la cartera

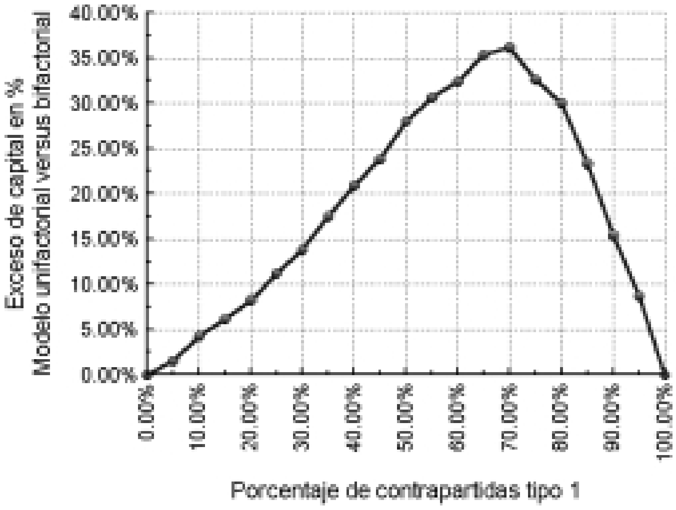
- p_1: Probabilidad de incumplimiento de las contrapartidas afectadas por el factor 1 (contrapartidas de tipo 1): 1%
- p_2: Probabilidad de incumplimiento de las contrapartidas afectadas por el factor 2 (contrapartidas de tipo 2): 3%
- n_1: Porcentaje de contrapartidas de tipo 1: ***varía entre 0 y 100%***
- n_2: porcentaje de contrapartidas de tipo 2 : ***varía en función de n_1***
- ρ_1: Correlación de activos de las contrapartidas de tipo 1: 20%
- ρ_2: correlación de activos de las contrapartidas de tipo2: 20%
- ρ_f: Correlación entre el factor 1 y el factor 2: 25%

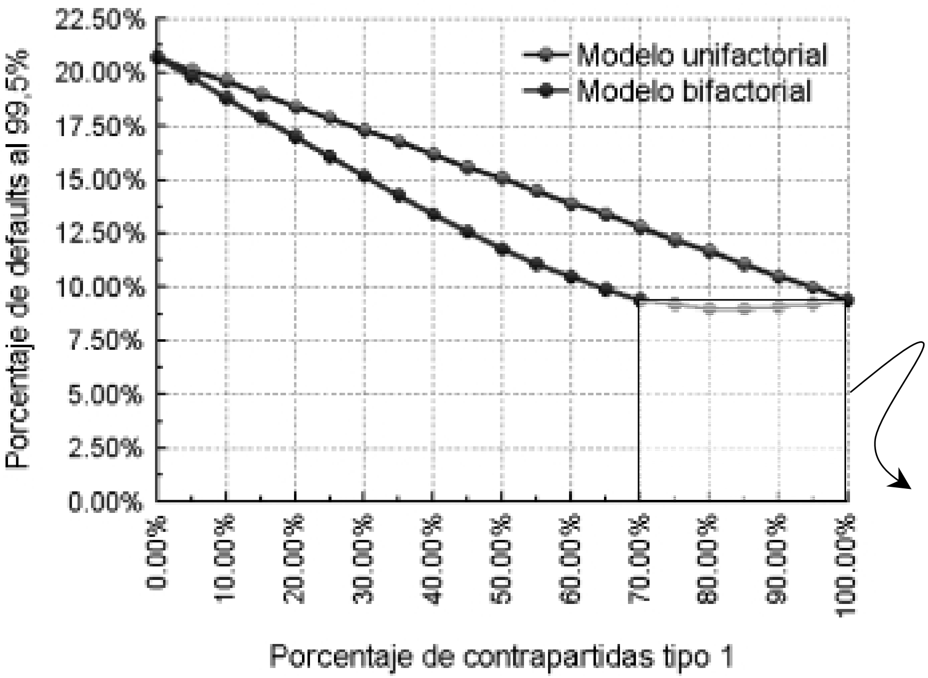
Un banco está pensando en incorporar a su cartera préstamos, en un nuevo país, con mayor PD y baja correlación. ¿Cuántos préstamos debería incorporar? ¿De nuevo, qué impacto tendrá esto en el capital económico y regulatorio?

La línea roja mide el percentil 99,5% para diferentes combinaciones de porcentajes de préstamos tipo 1 y 2 considerando una correlación entre factores del 25%. La línea morada es el caso unifactorial (que es igual que suponer una correlación de factores del 100%)...



El gráfico inferior mide el "exceso" de capital del modelo unifactorial respecto del modelo bifactorial con correlación entre factores del 25%

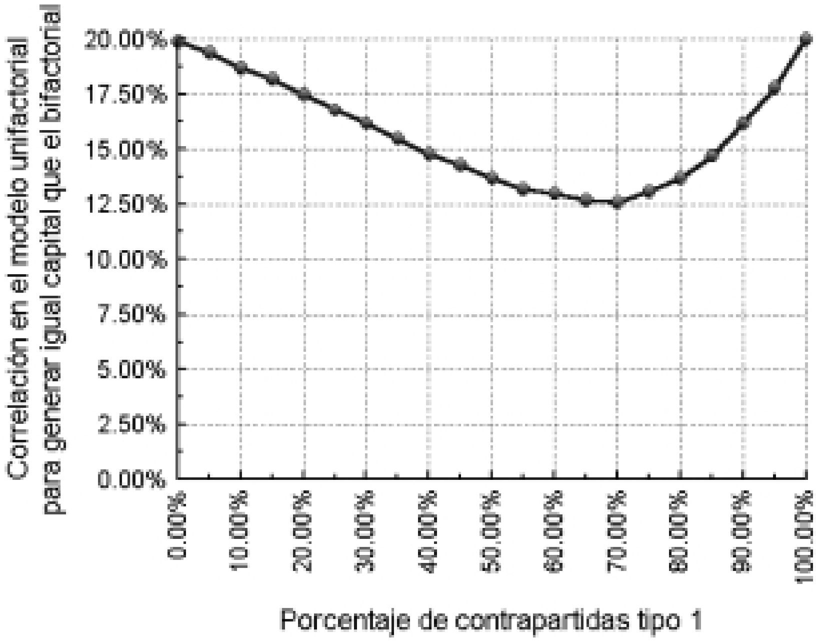




Añadir préstamos de peor calidad incluso reduce el capital requerido

En el modelo unifactorial, añadir a la cartera con préstamos de PD 1% otros préstamos con PD superior (3%) siempre incrementa las necesidades de capital. Sin embargo, en el modelo bifactorial añadir préstamos con PD del 3% (en cantidades razonables, inferiores a un 30%) incluso disminuye ligeramente las necesidades de capital debido al efecto de diversificación.

Resulta interesante determinar cuál es el nivel de correlación medio que bajo el modelo unifactorial genera las mismas necesidades de capital que el modelo bifactorial con correlación de factores del 25%.



Existen combinaciones de cartera que reducirían el nivel de correlación "implícita" unifactorial hasta el 12.50% . Estos resultados están en línea con los obtenidos del análisis empírico de los defaults históricos (Moody's)

LA PROBABILIDAD DE INCUMPLIMIENTO

El modelo Actuarial: Ratings Externos

TASAS HISTÓRICAS DE DEFAULT

Las tablas siguientes presentan las tasas históricas de incumplimientos en función del grado de rating.

Las agencias de rating estiman las probabilidades de incumplimiento mediante las tasas históricas de incumplimiento.

Initial rating	D
AAA	0.00
AA	0.01
A	0.05
BBB	0.27
BB	1.29
B	6.71
CCC	28.76

S&P

	Default
Aaa	0.00
Aa1	0.00
Aa2	0.00
Aa3	0.08
A1	0.00
A2	0.02
A3	0.00
Baa1	0.08
Baa2	0.07
Baa3	0.43
Ba1	0.62
Ba2	0.65
Ba3	2.27
B1	3.71
B2	8.04
B3	12.50
Caa-C	26.54

Moody's

Existen problemas en la estimación de las probabilidades de incumplimientos a partir de las tasas históricas de incumplimientos:

- Se tienen pocos datos:
  - ✓Pocas compañías con rating
  - ✓Tasas de incumplimientos bajas
  - ✓Pocos años de seguimiento.
- Como consecuencia de ello, altas bandas de incertidumbre en las estimaciones

LA TASA DE INCUMPLIMIENTO EN UNA CARTERA CON DEFAULTS INDEPENDIENTES.

Cuando los defaults son independientes, tenemos N contrapartidas, todas ellas con igual probabilidad de incumplimiento, tasa de recuperación cero (severidad del 100%) y un portfolio de exposición total constante igual a 100:

$$E(Credit\ Losses) = E(CL) = E\left(\sum_{i=1}^{N} b_i \cdot \frac{100}{N} \cdot (1-0)\right) = \sum_{i=1}^{N} p \cdot \frac{100}{N} = p \cdot 100$$

$$\sigma_{Credit\ Losses} = \sigma_{\sum_{i=1}^{N} b_i \cdot \frac{100}{N} \cdot (1-0)} = \frac{100}{N} \cdot \sigma_{\sum_{i=1}^{N} b_i} = 100 \cdot \frac{\sqrt{N} \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)}}{N} =$$

$$\sigma_{Credit\ Losses} = 100 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{N}}$$

LA TASA DE INCUMPLIMIENTO EN UNA CARTERA CON DEFAULTS INDEPENDIENTES..

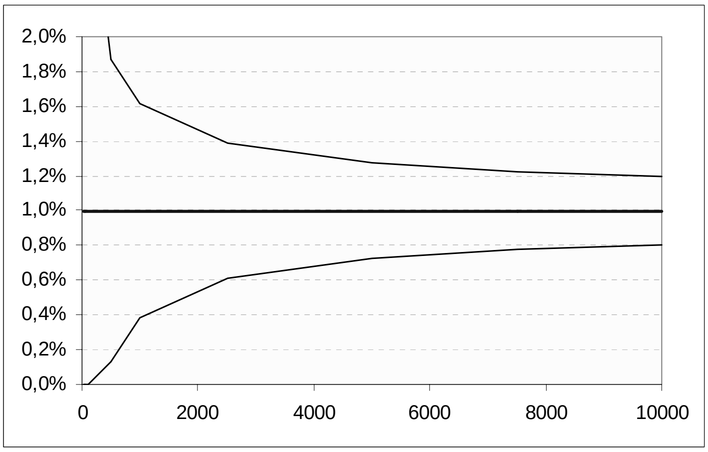
Por el teorema central del límite, si los defaults son independientes, entonces:

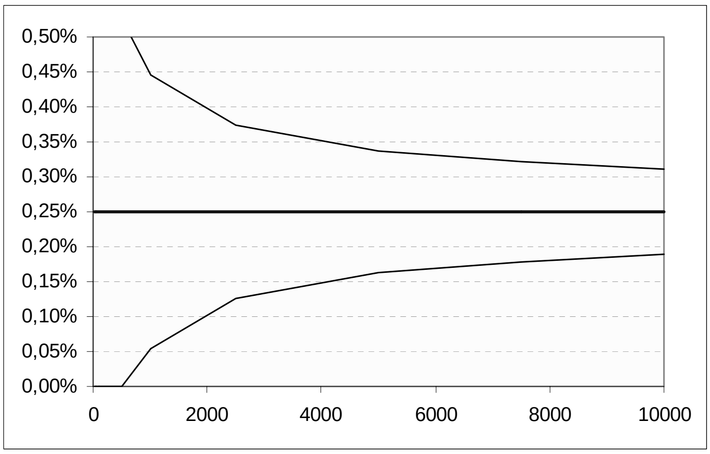
$$Credit\ Losses \propto N\left(100\cdot p\ ,\ 100\cdot\frac{\sqrt{p\cdot(1-p)}}{\sqrt{N}}\right)$$

Si los defaults no son independientes, entonces no podemos aplicar el teorema central del límite y la distribución de pérdidas crediticias no va a converger a una distribución normal.

La distribución anterior nos proporciona una banda de confianza en la estimación de la PD media.

TASAS HISTÓRICAS DE DEFAULT





Como vemos en las gráficas adjuntas, las bandas de confianza de la estimación (al 95%) son bastante amplias, sólo aumentando notablemente la muestra se consigue ir reduciéndolas, sobre todo cuando las tasas de incumplimientos son bajas.

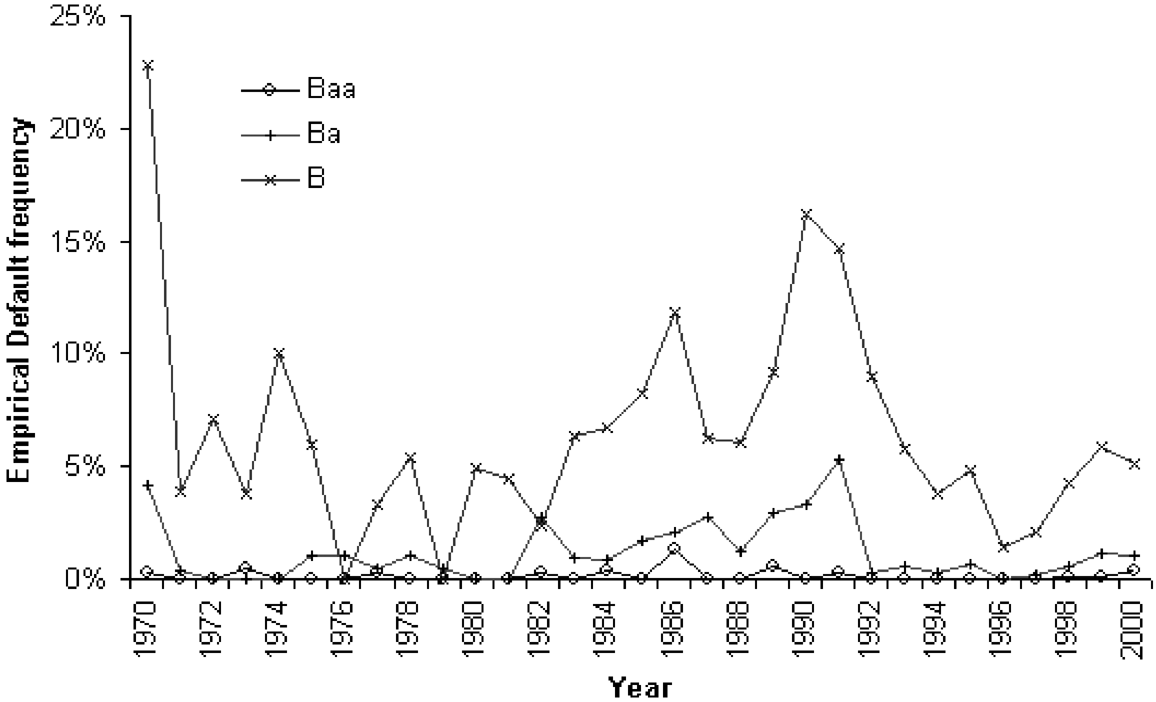
Por otro lado, un problema adicional viene determinado por la ciclicidad (correlación) de dichas tasas, como podemos ver en la transparencia siguiente.

CICLICIDAD DEL DEFAULT (Moody's)

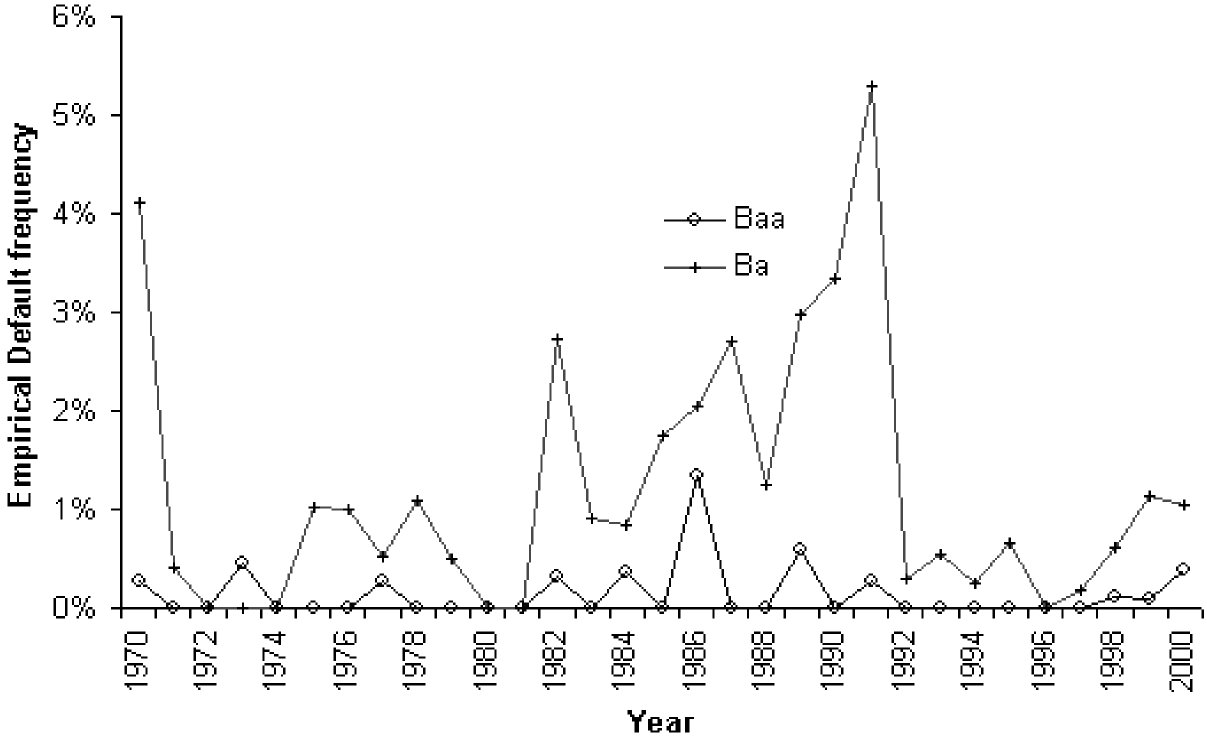
ONE-YEAR DEFAULT RATES BY YEAR AND LETTER RATING, 1970-2000 (EMPIRICAL)

	RATING								
Year	*Aaa*	*Aa*	*A*	*Baa*	*Ba*	*B*	Investment Grade	Speculative Grade	All Corporates
1970	0,00%	0,00%	0,00%	0,27%	4,12%	22,78%	0,14%	9,38%	2,72%
1971	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,42%	3,86%	0,00%	1,14%	0,28%
1972	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	7,14%	0,00%	1,94%	0,45%
1973	0,00%	0,00%	0,00%	0,45%	0,00%	3,77%	0,23%	1,28%	0,45%
1974	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	10,00%	0,00%	1,35%	0,27%
1975	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,02%	5,97%	0,00%	1,79%	0,36%
1976	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,01%	0,00%	0,00%	0,89%	0,17%
1977	0,00%	0,00%	0,00%	0,28%	0,52%	3,28%	0,11%	1,35%	0,35%
1978	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,08%	5,41%	0,00%	1,79%	0,35%
1979	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,49%	0,00%	0,00%	0,42%	0,09%
1980	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	4,94%	0,00%	1,62%	0,34%
1981	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	4,49%	0,00%	0,71%	0,16%
1982	0,00%	0,00%	0,26%	0,31%	2,72%	2,41%	0,21%	3,57%	1,03%
1983	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,91%	6,31%	0,00%	3,88%	0,95%
1984	0,00%	0,00%	0,00%	0,36%	0,83%	6,72%	0,09%	3,39%	0,91%
1985	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,75%	8,22%	0,00%	3,90%	1,06%
1986	0,00%	0,00%	0,00%	1,33%	2,04%	11,80%	0,32%	5,67%	1,89%
1987	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	2,71%	6,25%	0,00%	4,23%	1,49%
1988	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,24%	6,04%	0,00%	3,47%	1,30%
1989	0,00%	0,61%	0,00%	0,60%	2,98%	9,21%	0,28%	6,03%	2,41%
1990	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	3,34%	16,16%	0,00%	9,85%	3,51%
1991	0,00%	0,00%	0,00%	0,28%	5,30%	14,71%	0,06%	10,52%	3,28%
1992	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,30%	9,03%	0,00%	4,86%	1,33%
1993	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,55%	5,79%	0,00%	3,51%	0,96%
1994	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,24%	3,82%	0,00%	1,93%	0,57%
1995	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,67%	4,80%	0,00%	3,30%	1,06%
1996	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,44%	0,00%	1,65%	0,53%
1997	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,19%	2,11%	0,00%	2,03%	0,67%
1998	0,00%	0,00%	0,00%	0,12%	0,61%	4,26%	0,04%	3,41%	1,26%
1999	0,00%	0,00%	0,00%	0,10%	1,14%	5,88%	0,04%	5,63%	2,20%
2000	0,00%	0,00%	0,00%	0,38%	1,05%	5,14%	0,14%	5,71%	2,28%
Average	**0,00%**	**0,02%**	**0,01%**	**0,14%**	**1,20%**	**6,51%**	**0,05%**	**3,55%**	**1,12%**
St. Dev.	**0,00%**	**0,11%**	**0,05%**	**0,28%**	**1,33%**	**4,70%**	**0,09%**	**2,65%**	**0,94%**

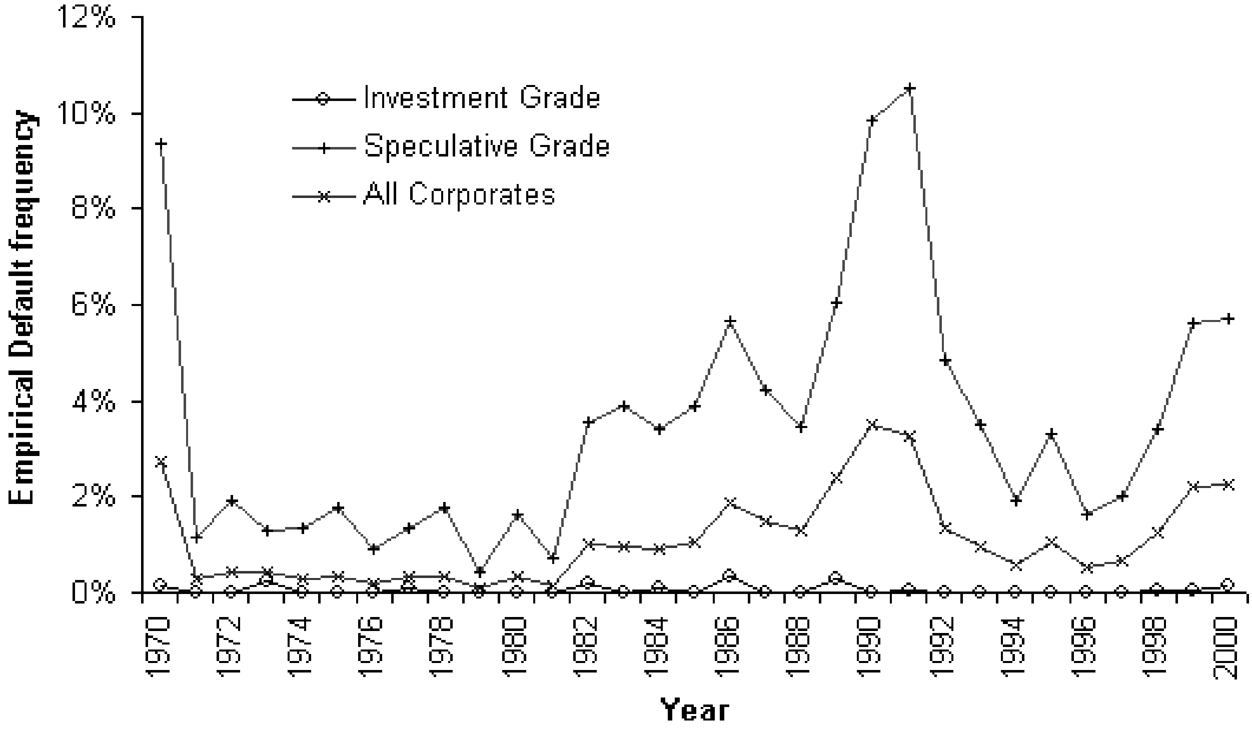
CICLICIDAD DEL DEFAULT (Moody's)



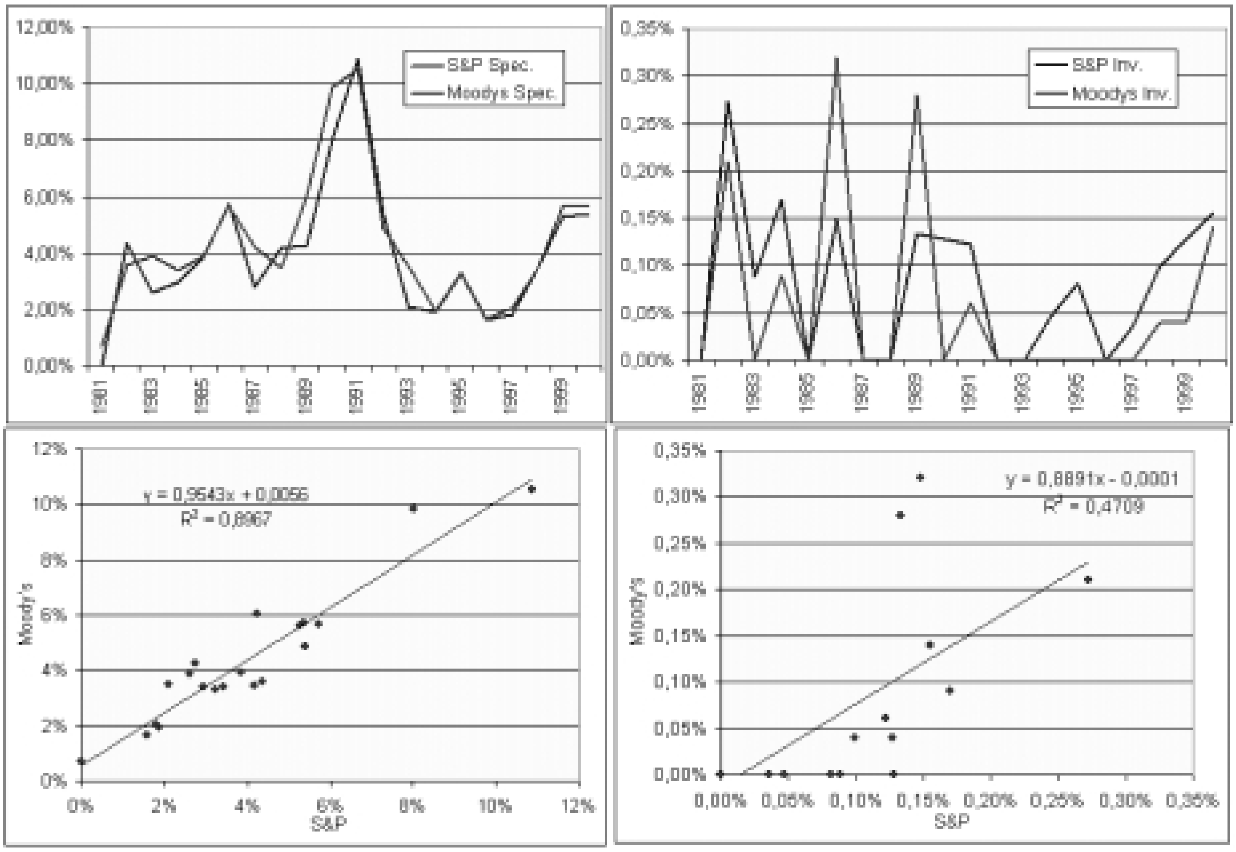
CICLICIDAD DEL DEFAULT (Moody's) - DETALLE



CICLICIDAD DEL DEFAULT: INVESTMENT vs. SPECULATIVE



CICLICIDAD DEL DEFAULT: Moody’s vs. S&P



MATRICES DE TRANSICIÓN

No sólo son importantes las probabilidades de incumplimiento, también son muy interesantes las probabilidades de “cambiar” de rating.

La matriz de transición proporciona las probabilidades de que una contrapartida se mueva de un rating a otro (realice una transición) a un año vista, condicionada a que al inicio del periodo tiene un determinado rating.

Se trata de una probabilidad condicionada:

$$P(X_{t+1} \mid X_t)$$

Propiedad de Markov:

$$P(X_{t+1} \mid X_t) = P(X_{t+1} \mid X_t, X_{t-1}, \ldots, X_{t-n})$$

<u>Hay indicios de que las matrices de transición no cumplen la propiedad de Markov</u>

MATRICES DE TRANSICIÓN

Rating Inicial

Rating final

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	Default
AAA							
AA							
A	1%	3%	80%	10%	3%	2%	1%
BBB							
BB							
B							
Default	0	0	0	0	0	0	100%

MATRICES DE TRANSICIÓN

	GRADO 1	*GRADO 2*	*GRADO 3*	*DEFAULT*
GRADO 1	*94%*	*3%*	*2%*	*1%*
GRADO 2	*2%*	*90%*	*3%*	*5%*
GRADO 3	*1%*	*19%*	*70%*	*10%*
DEFAULT	*0%*	*0%*	*0%*	*100%*

MATRICES DE TRANSICIÓN: UN EJEMPLO

MATRIZ DE TRANSICIÓN A UN AÑO

	A	B	C	Default
A	97%	3%	0%	0%
B	2%	93%	2%	3%
C	1%	12%	64%	23%
Default	0%	0%	0%	100%

MATRIZ DE TRANSICIÓN A 2 AÑOS

	A	B	C	Default
A	94,15%	5,70%	0,06%	0,09%
B	3,82%	86,79%	3,14%	6,25%
C	1,85%	18,87%	41,20%	38,08%
Default	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%

MATRIZ DE TRANSICIÓN A 3 AÑOS

	A	B	C	Default
A	91,44%	8,13%	0,15%	0,27%
B	5,47%	81,21%	3,75%	9,58%
C	2,58%	22,55%	26,75%	48,12%
Default	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%

MATRIZ DE TRANSICIÓN A 4 AÑOS

	A	B	C	Default
A	88,86%	10,32%	0,26%	0,55%
B	6,97%	76,14%	4,02%	12,87%
C	3,22%	24,26%	17,57%	54,95%
Default	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%

MATRIZ DE TRANSICIÓN A 5 AÑOS

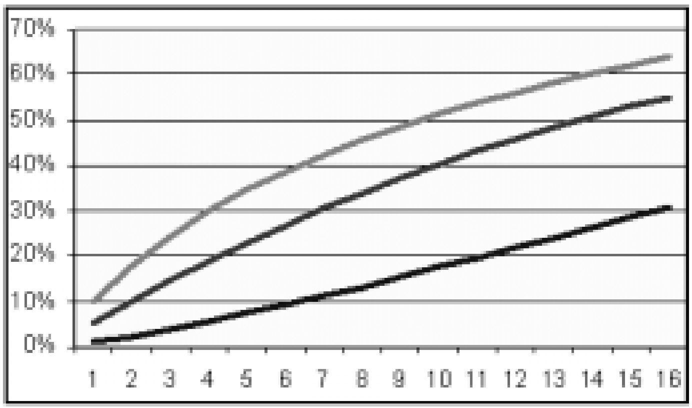
	A	B	C	Default
A	86,40%	12,30%	0,37%	0,92%
B	8,32%	71,50%	4,10%	16,08%
C	3,79%	24,76%	11,73%	59,72%
Default	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%

MATRIZ DE TRANSICIÓN A 6 AÑOS

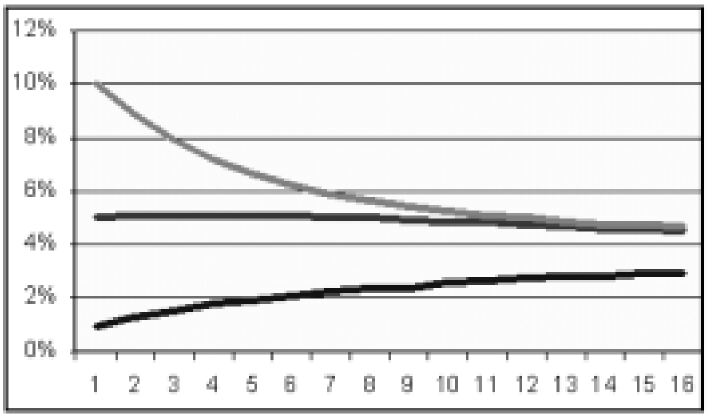
	A	B	C	Default
A	84,06%	14,08%	0,48%	1,38%
B	9,55%	67,23%	4,05%	19,17%
C	4,29%	24,55%	8,00%	63,16%
Default	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%

MATRICES DE TRANSICIÓN: UN EJEMPLO

Probabilidades de incumplimiento acumuladas



Probabilidades de incumplimiento condicionadas



Las probabilidades condicionadas convergen a largo plazo.

CONCEPTOS RELATIVOS A LAS PROBS. DE DEFAULT

PROBABILIDADES DE DEFAULT ACUMULADAS

Es la probabilidad de que una contrapartida incumpla entre hoy y un año futuro T.

PROBABILIDADES DE DEFAULT MARGINALES O CONDICIONADAS

Es la probabilidad de que una contrapartida incumpla en un año determinado, condicionada a que no ha incumplido hasta el año anterior.

PROBABILIDADES DE DEFAULT ABSOLUTAS

Es la probabilidad de que una contrapartida incumpla en un año determinado, sin condicionar.

TASA DE SUPERVIVIENCIA.

Es la probabilidad de que una contrapartida no incumpla entre hoy y un año futuro T.

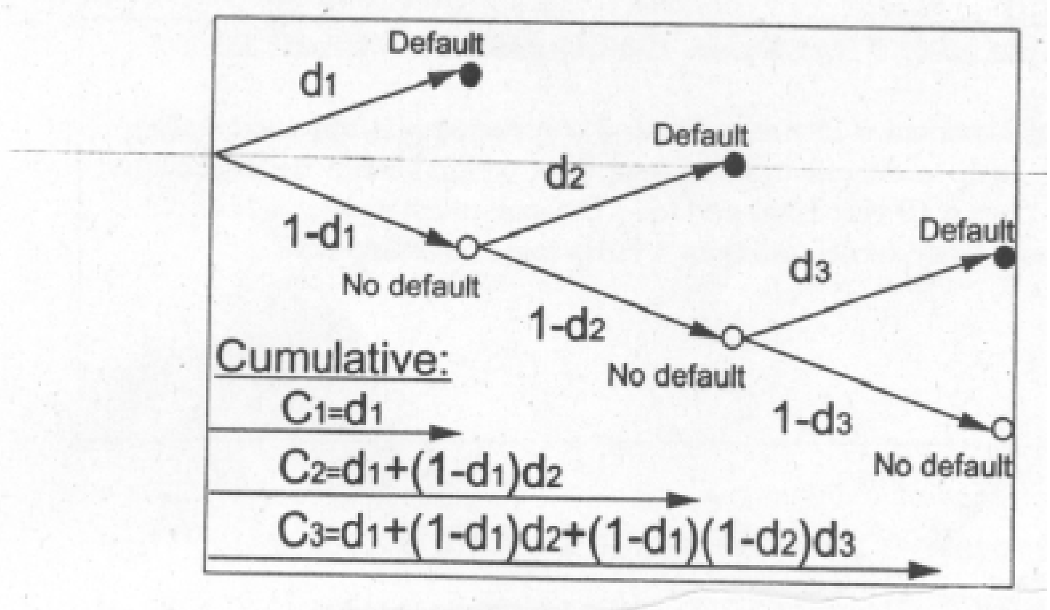
TASA DE DEFAULT MEDIA

CONCEPTOS RELATIVOS A LAS PROBS. DE DEFAULT

Según el ejemplo:

Las probabilidades d_i son las probabilidades condicionadas o marginales para cada año.

FIGURE 19-1 Sequential Default Process



CONCEPTOS RELATIVOS A LAS PROBS. DE DEFAULT

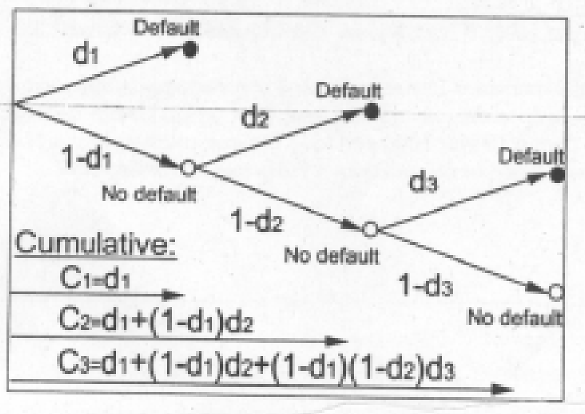
Continuando con el ejemplo:

$$\text{Tasa de supervivencia hasta el año N} = S_N = \prod_{i=1}^{N}(1-d_i)$$

$$\text{Prob. de default acumulada hasta el año N} = C_N = 1 - S_N = 1 - \prod_{i=1}^{N}(1-d_i)$$

$$\text{Prob. de default absoluta en el año N} = S_{N-1} \cdot d_N$$

FIGURE 19-1 Sequential Default Process



Un resultado interesante es:

$$C_N = \sum_{i=1}^{N} S_{i-1} \cdot d_i$$

$$donde \quad S_0 = 1$$

CONCEPTOS RELATIVOS A LAS PROBS. DE DEFAULT

La tasa media de default (marginal) es aquella tasa constante que cumple:

$$S_N = \prod_{i=1}^{N}(1-d_i) = \prod_{i=1}^{N}(1-\bar{d})$$

$$\bar{d} = 1 - \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N}(1-d_i)}$$

Podemos definir la tasa media de default continua (marginal) como aquella tasa constante que cumple:

$$S_N = e^{-N \cdot \bar{d}_c}$$

Esto es:

$$S_N = e^{-N \cdot \bar{d}_c}$$

$$\bar{d}_c = -\frac{\ln(S_N)}{N} = -\frac{\ln(1-C_N)}{N}$$

MATRICES DE TRANSICIÓN: rating externo

Los cuadros adjuntos presentan las matrices de transición de Moody's con y sin ajuste por NR (no rating).

El ajuste por no rating es un ajuste que básicamente extrapola el comportamiento de las que mantienen clasificación de rating a las que la pierden.

Average One-Year Transition Rates

	—Rating at year end (%)—								
Initial Rating	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D	N.R.
AAA	89.62	5.92	0.43	0.09	0.03	0.00	0.00	0.00	3.93
AA	0.60	88.29	6.78	0.51	0.05	0.09	0.02	0.01	3.86
A	0.06	2.10	87.79	5.04	0.43	0.17	0.04	0.05	4.33
BBB	0.03	0.23	4.36	84.43	4.15	0.73	0.23	0.26	5.58
BB	0.02	0.06	0.41	5.75	75.98	7.05	1.09	1.22	8.42
B	0.00	0.08	0.27	0.35	4.77	74.15	3.90	5.96	10.53
CCC	0.11	0.00	0.22	0.67	1.45	8.95	51.34	24.72	12.53

N.R.—Rating withdrawn.

N.R.-Adjusted Average One-Year Transition Rates

	—Rating at year end (%)—							
Initial rating	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	93.28	6.16	0.44	0.09	0.03	0.00	0.00	0.00
AA	0.62	91.64	7.04	0.53	0.06	0.09	0.02	0.01
A	0.06	2.20	91.77	5.26	0.44	0.18	0.04	0.05
BBB	0.04	0.25	4.64	89.45	4.35	0.75	0.25	0.27
BB	0.03	0.07	0.45	6.31	83.07	7.58	1.20	1.29
B	0.00	0.09	0.31	0.41	5.38	82.78	4.31	6.71
CCC	0.13	0.00	0.27	0.81	1.75	10.08	58.20	28.76

N.R.—Rating withdrawn.

MATRICES DE TRANSICIÓN

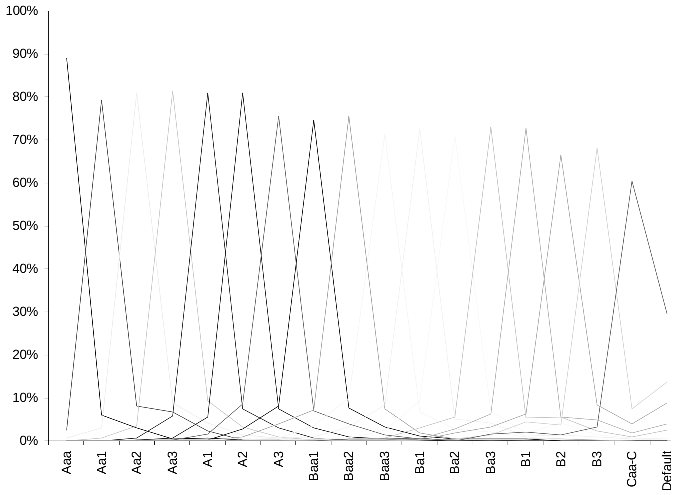
La matriz adjunta es la matriz de transición de Moody's, sin ajuste por no rating y para la escala más desglosada, alfanumérica.

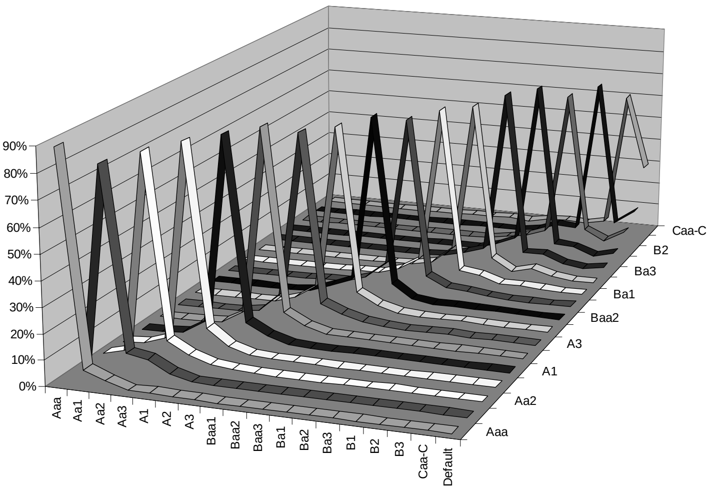
Exhibit 13 — Average One-Year Rating Transition Rates, 1983-2001

Rating From:	Rating to: Aaa	Aa1	Aa2	Aa3	A1	A2	A3	Baa1	Baa2	Baa3	Ba1	Ba2	Ba3	B1	B2	B3	Caa-C	Default	WR
Aaa	85.00	5.88	2.90	0.47	0.71	0.28	0.16	0.00	0.00	0.00	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	4.56
Aa1	2.54	76.02	7.87	6.58	2.31	0.32	0.05	0.18	0.00	0.00	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	4.04
Aa2	0.70	2.90	77.00	8.39	3.93	1.35	0.58	0.16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	4.85
Aa3	0.08	0.61	3.36	77.88	8.89	3.14	0.85	0.24	0.21	0.16	0.00	0.04	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	4.38
A1	0.03	0.11	0.60	5.53	77.68	7.20	2.88	0.78	0.27	0.13	0.36	0.25	0.05	0.12	0.01	0.00	0.00	0.00	3.99
A2	0.05	0.06	0.29	0.77	5.34	77.47	7.18	2.87	0.80	0.39	0.28	0.10	0.11	0.03	0.07	0.00	0.03	0.02	4.13
A3	0.05	0.10	0.05	0.23	1.48	8.26	71.77	6.69	3.65	1.43	0.54	0.19	0.22	0.33	0.05	0.04	0.01	0.00	4.91
Baa1	0.08	0.02	0.13	0.18	0.20	2.71	7.67	71.19	7.37	3.14	1.04	0.46	0.35	0.55	0.09	0.00	0.02	0.08	4.73
Baa2	0.07	0.10	0.12	0.17	0.17	0.87	3.67	6.90	71.50	7.02	1.68	0.52	0.65	0.48	0.45	0.23	0.03	0.07	5.30
Baa3	0.03	0.00	0.03	0.07	0.18	0.57	0.65	3.22	9.33	67.03	6.38	2.59	1.90	0.80	0.31	0.18	0.16	0.43	6.15
Ba1	0.08	0.00	0.00	0.03	0.22	0.12	0.67	0.75	2.94	7.68	66.47	4.60	3.88	1.12	1.27	0.81	0.33	0.62	8.39
Ba2	0.00	0.00	0.00	0.03	0.04	0.15	0.13	0.35	0.70	2.30	8.35	63.96	6.20	1.67	3.70	1.35	0.53	0.65	9.88
Ba3	0.00	0.02	0.00	0.00	0.04	0.16	0.17	0.17	0.26	0.69	2.71	5.04	66.66	4.83	5.16	2.22	0.85	2.27	8.74
B1	0.02	0.00	0.00	0.00	0.06	0.09	0.15	0.07	0.24	0.30	0.42	2.52	5.70	66.89	5.22	4.58	1.78	3.71	8.23
B2	0.00	0.00	0.06	0.01	0.11	0.00	0.07	0.17	0.12	0.18	0.29	1.63	2.95	5.75	61.22	7.61	3.69	8.04	8.10
B3	0.00	0.00	0.06	0.00	0.02	0.04	0.06	0.11	0.12	0.20	0.18	0.35	1.17	4.02	3.36	62.05	6.84	12.50	8.91
Caa-C	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.48	0.48	0.64	0.00	1.36	1.85	1.23	2.87	54.21	26.54	10.36

MATRICES DE TRANSICIÓN

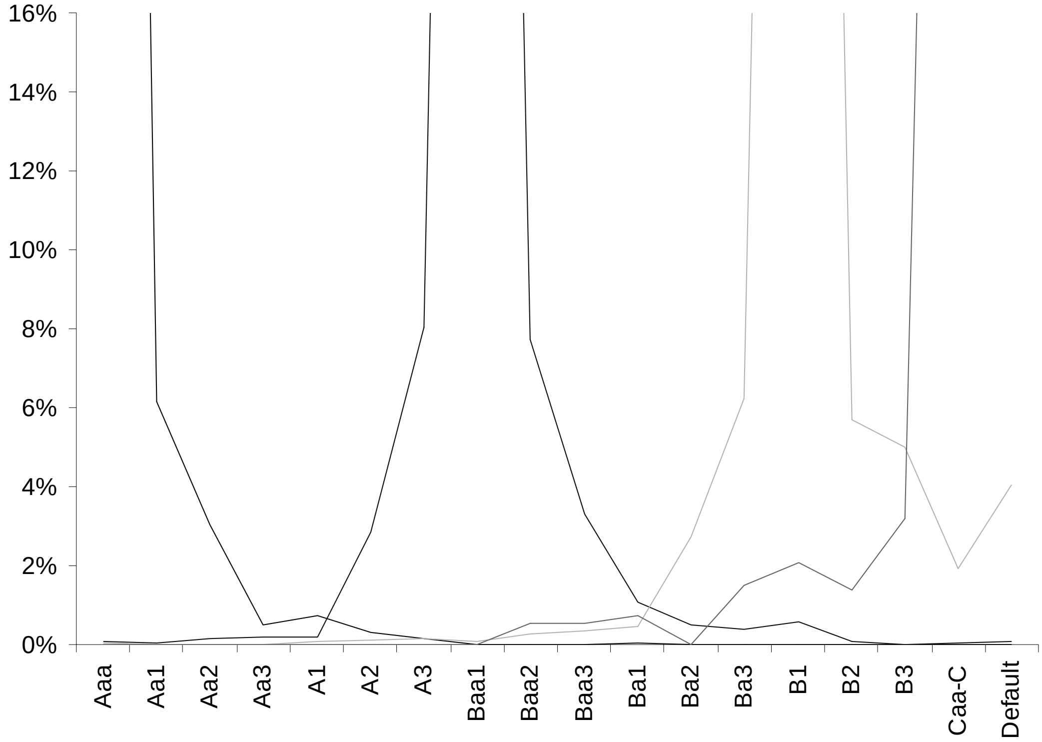
Podemos representar gráficamente la matriz de transición de Moody's, ajustando por no rating





MATRICES DE TRANSICIÓN

El gráfico adjunto es un detalle de la matriz de transición de Moody's, ajustando por no rating, para los ratings Aaa, Baa1, B1 y Caa



MATRICES DE TRANSICIÓN

Igual que se tiene una probabilidad de default para cada año, es posible estimar una matriz de transición para cada año, de forma que se observaría el ciclo en toda la matriz, no sólo en los defaults...

Exhibit 15 — 2001 Cohort Rating Transition Rates

Rating from: \ Rating to:	Aaa	Aa1	Aa2	Aa3	A1	A2	A3	Baa1	Baa2	Baa3	Ba1	Ba2	Ba3	B1	B2	B3	Caa-C	Default	WR
Aaa	89.91	0.00	0.92	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	9.17
Aa1	0.00	75.65	17.39	1.74	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	5.22
Aa2	1.10	6.59	74.18	7.69	1.10	6.04	0.55	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.55	0.00	0.00	0.00	0.00	2.20
Aa3	0.00	4.27	5.07	81.60	4.00	0.27	1.07	0.27	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.47
A1	0.00	0.00	0.89	6.55	73.81	8.33	5.36	1.49	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.57
A2	0.43	0.00	0.21	0.21	3.21	76.87	8.99	3.21	1.71	0.00	0.21	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.21	0.43	4.28
A3	0.24	0.00	0.00	0.24	1.21	5.07	77.05	6.76	4.11	1.69	0.24	0.00	0.48	0.00	0.24	0.24	0.24	0.00	2.17
Baa1	0.00	0.00	0.00	0.28	0.28	0.56	4.46	77.44	8.36	3.06	0.28	1.11	0.00	0.28	0.00	0.00	0.00	0.56	3.34
Baa2	0.54	0.27	0.00	0.00	1.09	0.54	1.91	3.54	73.84	9.81	2.18	0.54	0.27	0.54	0.00	0.27	0.27	0.27	4.09
Baa3	0.00	0.00	0.00	0.33	0.00	0.65	0.98	0.33	10.42	73.29	3.26	3.26	2.28	0.65	0.00	0.65	0.33	0.00	3.58
Ba1	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	2.00	0.50	1.50	11.00	66.50	2.00	4.50	1.50	2.50	0.50	0.00	0.50	6.00
Ba2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.69	0.69	2.08	15.97	53.47	9.72	5.56	2.08	2.08	1.39	1.39	4.86
Ba3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.57	1.14	2.29	8.57	64.57	7.43	4.57	1.14	2.29	1.71	5.71
B1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.29	0.29	0.29	1.16	7.56	4.94	52.62	9.59	3.49	10.47	3.49	5.81
B2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.27	0.81	0.54	0.27	0.27	0.00	1.36	4.61	56.91	4.34	14.09	10.57	5.96
B3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.85	2.97	52.54	21.19	15.25	7.20
Caa-C	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.39	0.39	1.56	54.69	30.47	12.50

MATRICES DE TRANSICIÓN

S&P también proporciona "su" matriz de transición... Aquí la tenemos sin ajuste por no rating.

Average One-Year Transition Rates by Rating Modifier (%)

Rating as of Jan. 1 \ —Rating at year end (%)—	AAA	AA+	AA	AA-	A+	A	A-	BBB+	BBB	BBB-	BB+	BB	BB-	B+	B	B-	CCC	D	N.R.
AAA	89.62	3.24	2.28	0.40	0.14	0.17	0.11	0.06	0.03	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.93
AA+	1.99	80.85	9.32	3.13	0.28	0.85	0.07	0.00	0.21	0.07	0.00	0.00	0.00	0.07	0.00	0.00	0.00	0.00	3.13
AA	0.62	1.21	83.01	6.96	2.34	1.42	0.26	0.45	0.21	0.09	0.05	0.02	0.02	0.02	0.00	0.02	0.05	0.00	3.24
AA-	0.05	0.29	3.07	79.83	8.21	3.26	0.48	0.19	0.11	0.03	0.03	0.00	0.00	0.00	0.13	0.00	0.00	0.03	4.31
A+	0.00	0.06	0.60	3.97	80.09	7.42	2.49	0.58	0.35	0.12	0.04	0.10	0.02	0.10	0.06	0.00	0.02	0.06	3.93
A	0.06	0.09	0.47	0.72	4.57	79.05	5.35	3.04	1.11	0.31	0.17	0.17	0.13	0.14	0.01	0.00	0.03	0.04	4.55
A-	0.12	0.05	0.14	0.42	1.00	6.76	75.62	7.13	2.64	0.74	0.21	0.32	0.12	0.16	0.02	0.02	0.07	0.05	4.42
BBB+	0.03	0.03	0.05	0.15	0.46	1.63	6.82	73.89	7.90	2.92	0.49	0.36	0.15	0.23	0.15	0.00	0.13	0.18	4.42
BBB	0.02	0.02	0.09	0.09	0.40	0.73	1.75	6.45	74.68	5.40	1.86	1.00	0.40	0.31	0.22	0.00	0.11	0.29	6.18
BBB-	0.06	0.00	0.09	0.18	0.18	0.42	0.48	1.98	7.14	72.14	5.13	2.82	1.05	0.66	0.36	0.36	0.51	0.33	6.12
BB+	0.10	0.00	0.00	0.05	0.15	0.29	0.29	0.73	3.29	10.35	64.59	5.13	3.43	1.45	1.06	0.19	0.97	0.48	7.45
BB	0.00	0.00	0.08	0.04	0.00	0.23	0.11	0.15	1.15	3.53	6.02	66.77	6.67	2.64	1.15	0.69	1.03	1.07	8.66
BB-	0.00	0.00	0.00	0.03	0.06	0.03	0.17	0.23	0.32	0.75	2.68	7.12	65.25	7.67	2.68	1.21	1.21	1.76	8.82
B+	0.00	0.07	0.00	0.08	0.00	0.06	0.15	0.08	0.12	0.19	0.41	1.49	4.57	69.35	5.47	2.31	2.34	3.24	10.17
B	0.00	0.00	0.09	0.00	0.00	0.21	0.21	0.00	0.17	0.09	0.47	0.60	1.70	6.65	60.76	4.35	4.77	9.29	10.65
B-	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.00	0.10	0.19	0.10	0.10	0.19	0.29	0.38	3.33	5.98	56.76	9.61	11.89	11.99
CCC	0.11	0.00	0.00	0.00	0.11	0.00	0.11	0.45	0.22	0.00	0.22	0.34	0.89	1.90	3.02	4.03	51.34	24.72	12.53

N.R.—Rating withdrawn.

PROBABILIDADES DE DEFAULT ACUMULADAS

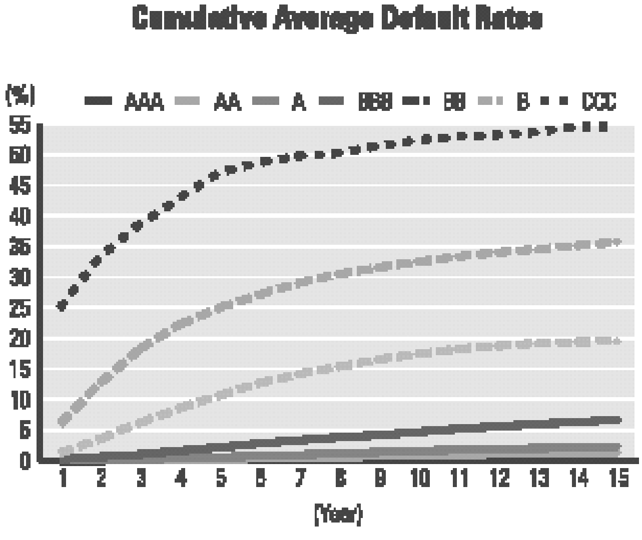
Los datos de defaults históricos permiten estimar muestralmente las tasas de incumplimiento acumuladas... Para más de un año. Aquí tenemos el calculo para el rating de S&P.

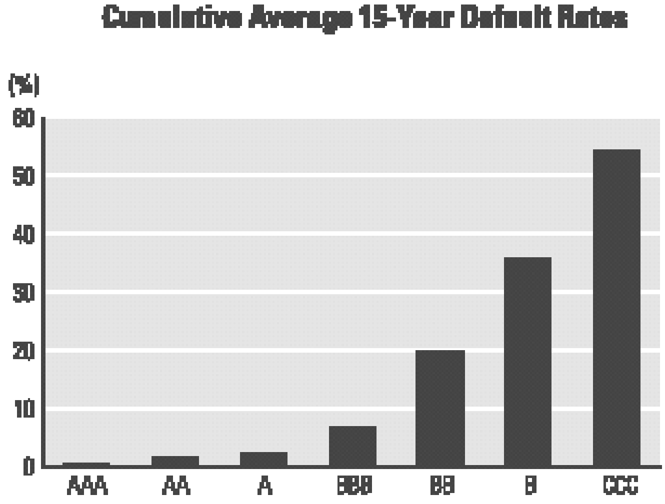
Static Pools Cumulative Average Default Rates by Rating Modifier (%)

Rating	Yr. 1	Yr. 2	Yr. 3	Yr. 4	Yr. 5	Yr. 6	Yr. 7	Yr. 8	Yr. 9	Yr. 10	Yr. 11	Yr. 12	Yr. 13	Yr. 14	Yr. 15
AAA	0	0	0.0318	0.0658	0.1023	0.181	0.2867	0.408	0.4602	0.5188	0.5188	0.5188	0.5188	0.5188	0.5188
AA+	0.00	0.00	0.00	0.09	0.19	0.30	0.42	0.42	0.42	0.42	0.42	0.42	0.42	0.42	0.42
AA	0.00	0.00	0.00	0.03	0.09	0.15	0.25	0.36	0.44	0.57	0.66	0.72	0.83	0.90	0.97
AA-	0.03	0.08	0.21	0.35	0.51	0.69	0.89	1.06	1.19	1.35	1.53	1.85	1.85	2.00	2.20
A+	0.06	0.13	0.25	0.47	0.62	0.79	0.98	1.15	1.40	1.62	1.81	1.88	1.96	2.15	2.26
A	0.04	0.12	0.18	0.27	0.43	0.58	0.72	0.92	1.16	1.38	1.59	1.75	1.96	2.06	2.32
A-	0.05	0.17	0.34	0.53	0.78	0.98	1.25	1.46	1.69	1.89	1.96	2.13	2.13	2.13	2.29
BBB+	0.18	0.47	0.83	1.21	1.60	2.14	2.48	2.74	2.88	3.21	3.57	3.78	4.02	4.29	4.60
BBB	0.29	0.68	0.98	1.52	2.04	2.42	2.84	3.36	3.88	4.42	4.94	5.30	5.70	5.88	6.08
BBB-	0.33	0.70	1.17	2.08	3.02	4.11	5.01	5.72	6.17	6.79	7.49	8.18	8.81	9.56	10.22
BB+	0.48	1.36	3.00	4.45	5.69	7.00	8.29	9.01	10.53	11.77	12.45	12.83	13.04	13.30	13.63
BB	1.07	2.97	5.27	7.26	8.94	10.73	11.82	13.11	13.98	14.62	15.56	16.23	16.69	16.69	16.69
BB-	1.78	5.14	8.64	11.82	14.73	17.44	19.29	20.69	21.95	22.90	23.66	24.07	24.77	25.03	25.19
B+	3.24	8.45	13.48	17.53	20.40	22.51	24.62	26.21	27.28	28.38	29.22	29.95	30.66	31.43	32.06
B	9.29	18.21	24.22	27.71	30.23	32.47	33.99	35.29	36.49	37.44	38.34	39.08	39.66	40.02	40.47
B-	11.89	21.20	28.51	33.68	36.69	38.52	40.37	41.70	42.43	42.95	43.23	43.53	43.53	43.53	44.02
CCC	24.72	33.06	38.40	42.60	46.87	48.48	49.62	50.02	51.28	52.22	52.76	53.07	53.45	54.38	54.38
Investment grade	0.10	0.24	0.39	0.63	0.88	1.14	1.38	1.62	1.84	2.08	2.30	2.48	2.65	2.79	2.98
Speculative grade	4.72	9.46	13.67	16.93	19.48	21.54	23.19	24.48	25.61	26.56	27.33	27.91	28.44	28.84	29.17

PROBABILIDADES DE DEFAULT ACUMULADAS

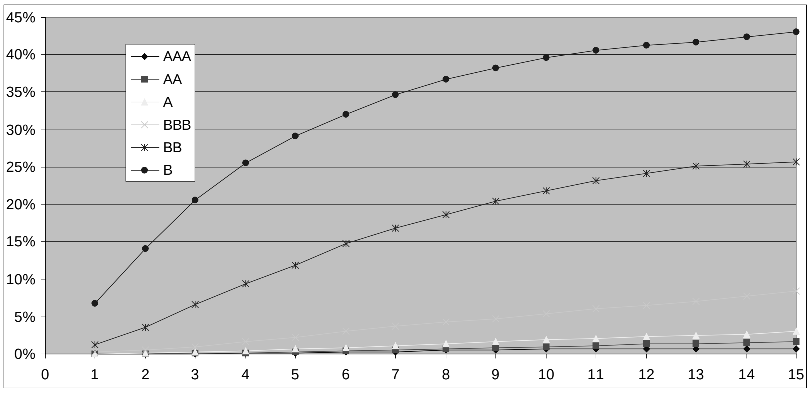
Gráficamente, las tasas de default acumuladas para el rating de S&P...

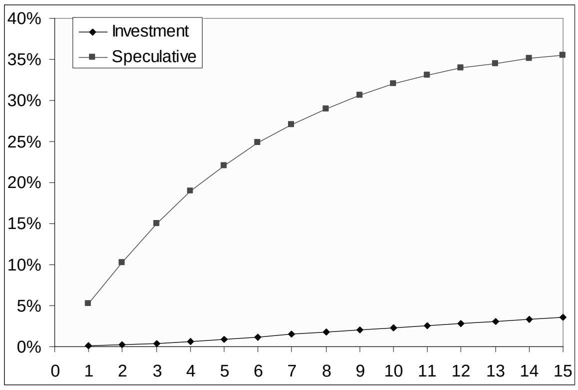




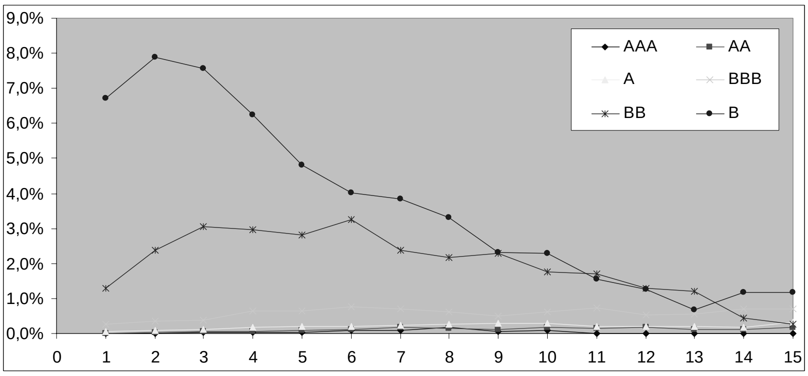
PROBABILIDADES DE DEFAULT ACUMULADAS

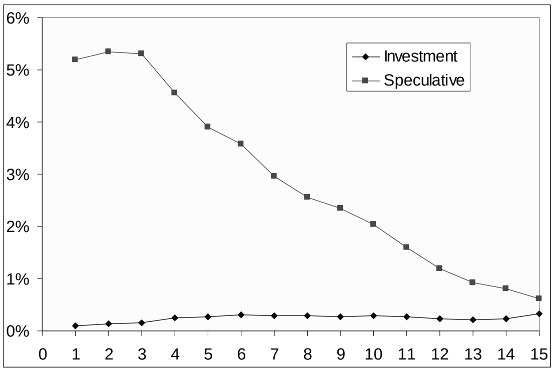
Gráficamente, las tasas de default empíricas acumuladas para el rating de S&P...





A partir de las acumuladas es fácil calcular las marginales





EJEMPLO DE CALIBRADO DE UNA HERRAMIENTA DE SCORING

DEFINICIÓN y OBJETIVO

SCORING: herramienta que ordena operaciones según una puntuación, y, en ocasiones, asigna una probabilidad de default a cada una de ellas.

FASES:

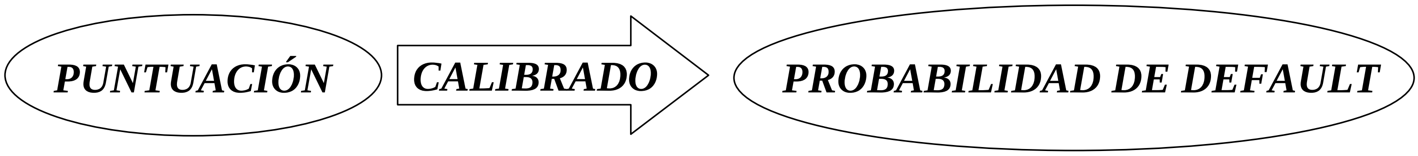
⌧ ***Construcción del modelo de ordenación: asignar una puntuación a cada operación sobre la base de una serie de características que discriminan entre la calidad de riesgo de las operaciones.***

⌧ ***Calibración del modelo: ¿Cómo de buena o mala es una operación con puntuación 25? ¿Cuánto mejor es una operación con puntuación 70 que una con puntuación 30? Resolver esta cuestión es calibrar, se trata de asociar cada puntuación con una probabilidad de mora.***

MORA: 90 días desde el primer impago.

PROBABILIDAD DE MORA CONDICIONADA (a un año).

DEFINICIÓN y OBJETIVO



VARIABLES DE INTERÉS:

Puntuación del scoring (que ya es compendio de muchas variables).

Variables que condicionen la relación: plazo, destino, tipo tarjeta…

Indicador de entrada en mora.

Fechas de formalización, vencimiento, entrada en mora y control.

¿Y si la puntuación ya es una probabilidad de malo?

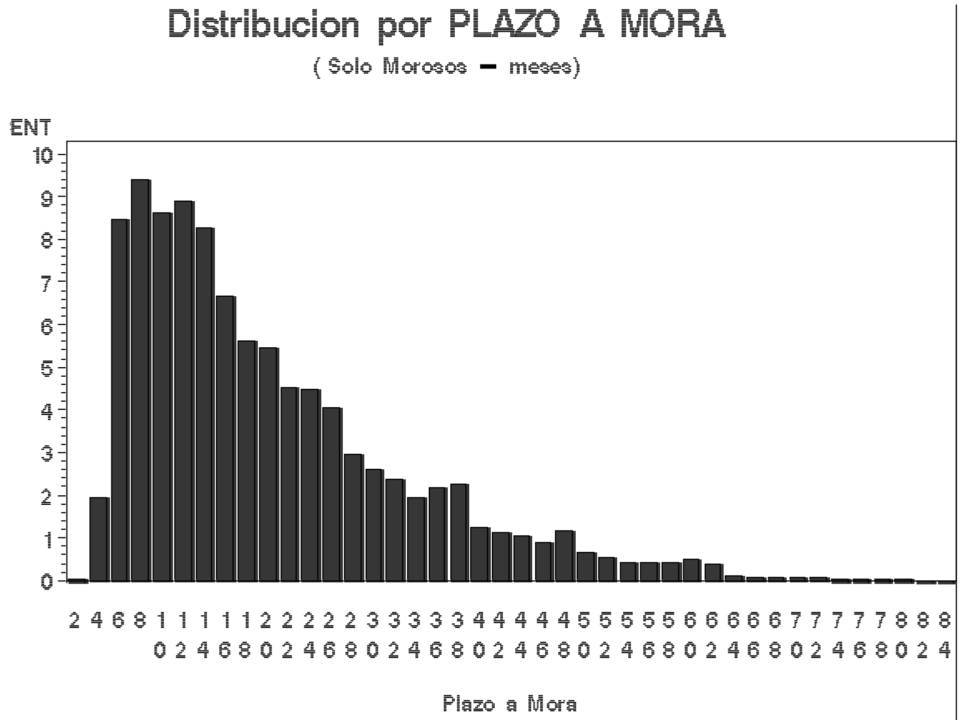
Diferencias en la definición de mora.

Diferencias en el horizonte de predicción. PD a un año vista.

ILUSTRACIÓN: CALIBRADO SCORING DE CONSUMO

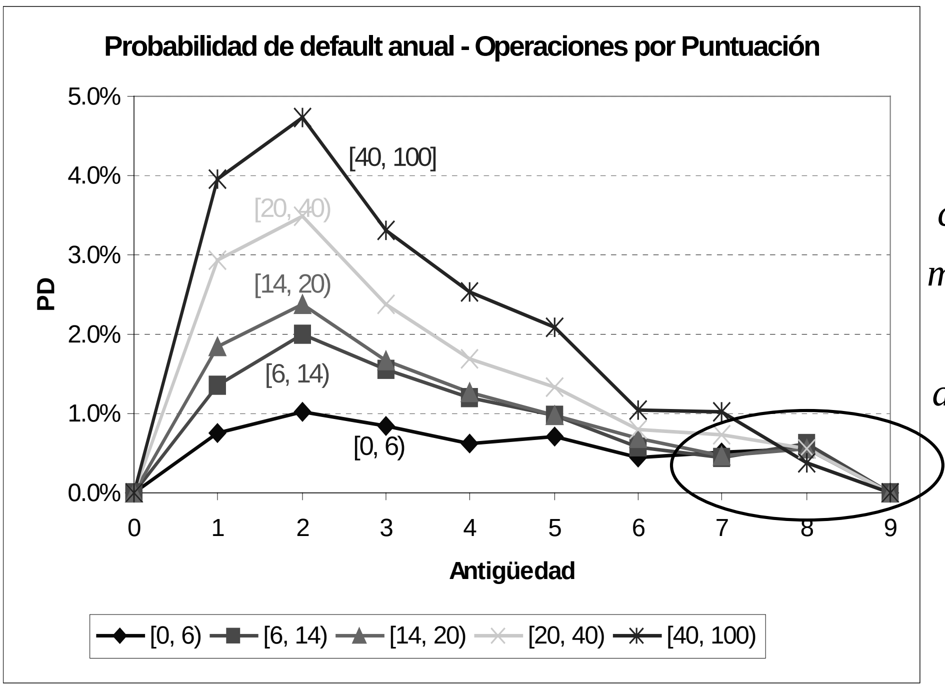
SCORING CONSUMO: Base de Datos

☒*1.581.998 prestamos al consumo de 1994 a 2001, fecha de control: 31/12/2001.*



El plazo a mora más frecuente es de 6 a 14 meses, a partir de ese instante la frecuencia es decreciente

SCORING CONSUMO: Estimación No Paramétrica de la PD



Si el scoring está bien construido y refleja correctamente la calidad crediticia, al segmentar la muestra por puntuación del scoring obtendremos diferentes curvas de PD en distintos niveles.

Las curvas convergen, pero se cruzan!

D e este modo, calcularemos la PD mediante el cociente anterior dentro de cada grupo de plazo original y rango de puntuación.

EJEMPLO: UNA HERRAMIENTA DE RATING

PD : RATING

El objetivo fundamental de una herramienta de rating es cuantificar y diferenciar el riesgo en una cartera de préstamos

Bueno

Malo

ENFOQUE TRADICIONAL

PUNTUACION	*ESCALA MAESTRA*	*EDF (%)*
100-96	AAA	0.01%
95-85	AA	0.02% - 0.04%
84-76	A	0.05% - 0.11%
75-72	BBB+	0.12% - 0.17%
71-69	BBB	0.18% - 0.24%
…...	…...	……..
47-42	B+	1.9% - 3.3%
41-36	B	3.3% - 5.8%
35-27	B-	5.8% - 10.6%
26-0	CCC	> 10.6%

NUEVO ENFOQUE

METODOLOGÍA PARA EL DESARROLLO DE HERRAMIENTAS DE RATING

1 Definición de términos clave
- Entrada en mora
- Posibles fuentes de información
- Factores que influyen en la mora : cuantitativos y cualitativos

⇨

2 Recopilación de datos
- Muestra de clientes buenos/malos
- Información histórica
- Selección y generación de factores

⇨

3 Análisis individual de factores
- Análisis del poder discriminante de cada factor
- Transformación de factores

⇨

4 Desarrollo y selección del modelo
- Análisis de correlaciones
- Creación y selección de los posibles modelos

⇨

5 Calibración
- Tasa media de la cartera
- Escala Maestra

Entrevistas
Grupos de trabajo

PRINCIPIOS BASICOS

- **Las variables tienen que tener sentido económico**
- **El modelo tiene que ser estadísticamente robusto y estable en el tiempo**
- **Máxima cobertura, evitando factores no informados**
- **Los factores tienen que ser sencillos**
- **Estabilidad para distintos sectores económicos**

ELECCIÓN DE LAS VARIABLES

- **La elección de las variables a incluir en el análisis es una etapa fundamental en la construcción de un Rating**
- **La primera variable es la definición de *bueno/malo***
- **Es esencial para la bondad del modelo**
- **Intervienen personas clave**
- **Es el momento en que se incluye el know-how del banco**
- **Es una etapa fundamental en la aceptación posterior del modelo**

ANÁLISIS INDIVIDUAL DE LOS FACTORES

🗐**Este análisis consiste en ver la relación de la mora con cada una de las variables definidas en el primer paso**

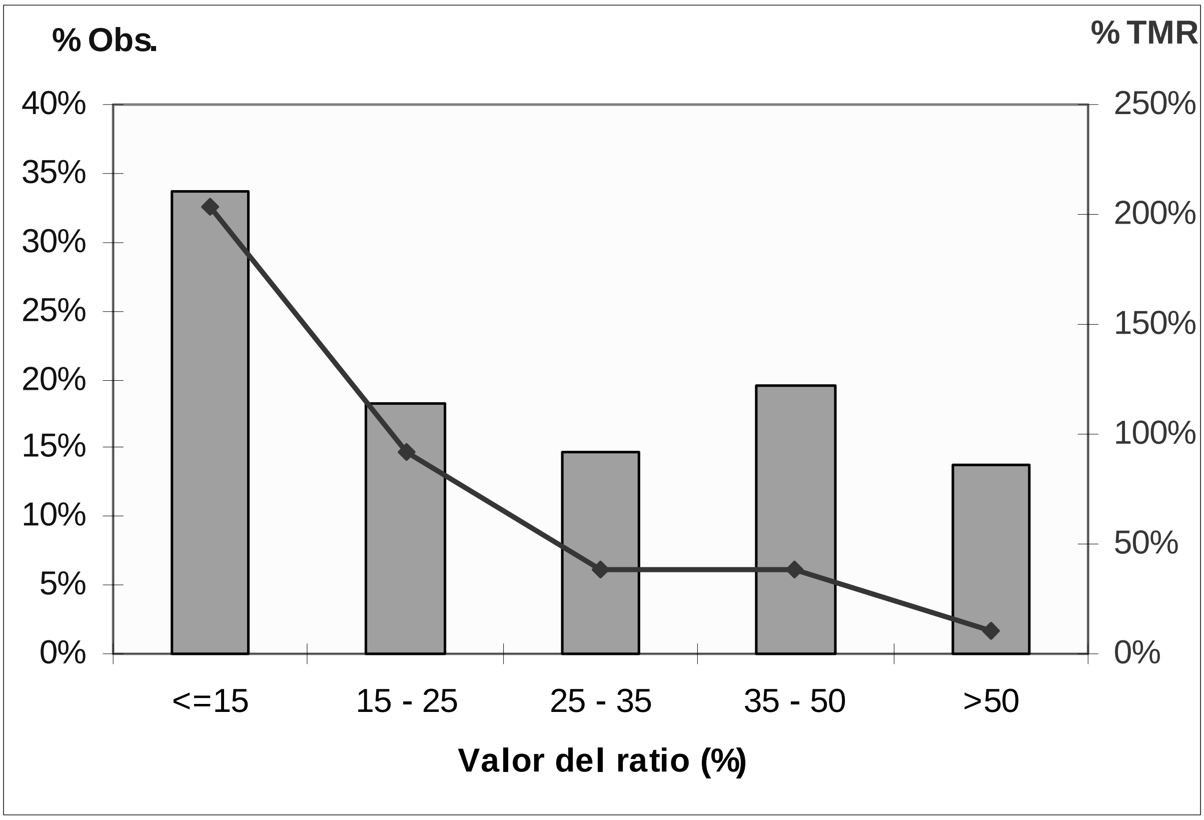
🗐**Este análisis consta de distintas partes fundamentales:**

- 🗐 **Trameado de los factores**
- 🗐 **Análisis de morosidad por tramo**

⇨ El resultado de estos análisis permite averiguar que variables influyen en el riesgo y de que forma

⇨ Pero los resultados hay que revisarlos con los expertos del banco

EJEMPLO DE FONDOS PROPIOS / BALANCE (%) (CURVA DE TMR)



ANÁLISIS INDIVIDUAL DE LOS FACTORES

- **Este análisis consta de distintas partes fundamentales:**
  - **Transformación de los factores**

    - Las herramientas que permiten generar modelos predictivos de morosidad suelen tratar las variables de entrada de forma lineal.

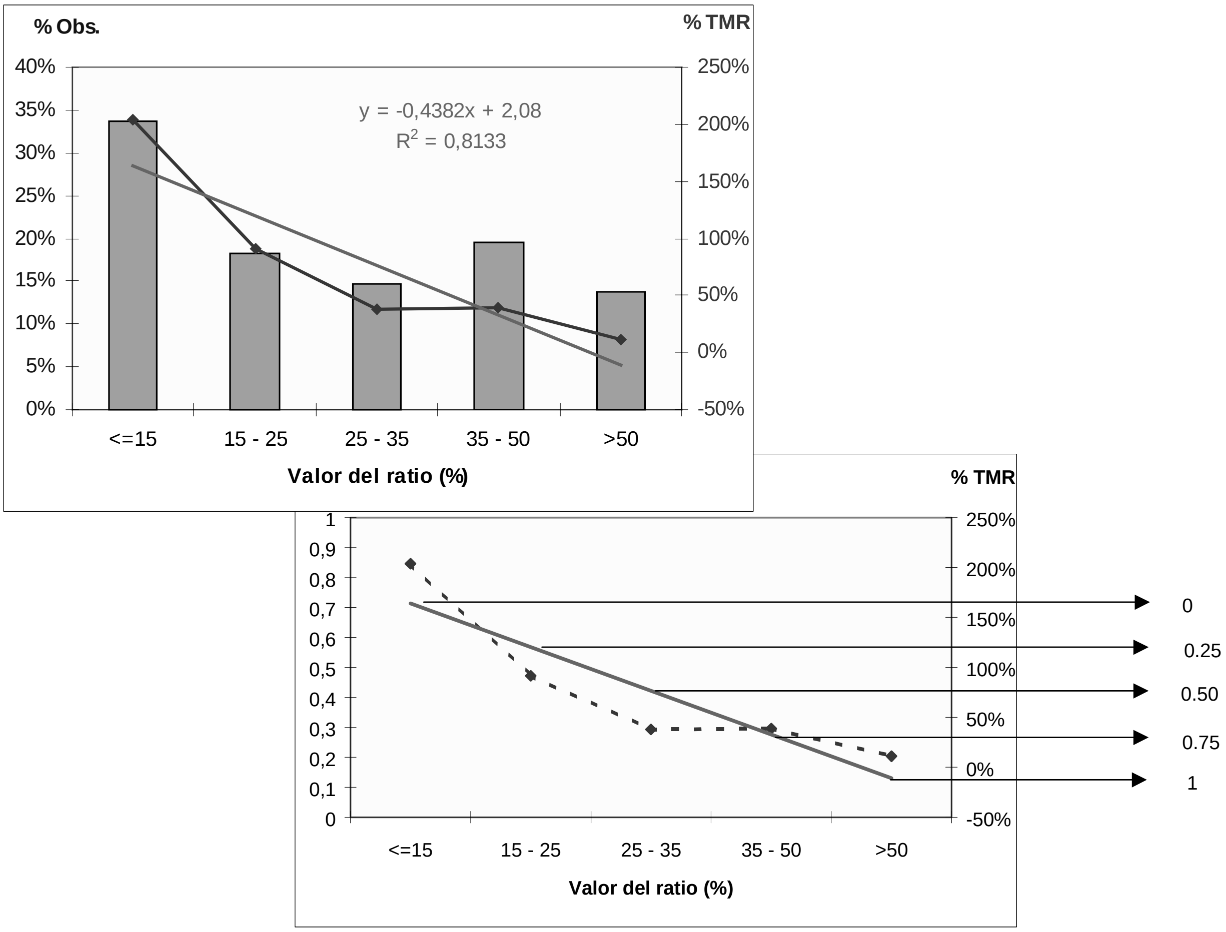
    - Es muy fácil, a partir del análisis anterior transformar las variables predictivas en nuevas variables con una relación lineal con la mora.

    - Esta transformación para obtener la linealidad se aprovecha para reescalar todas las variables de modo que el rango de variación sea siempre el mismo.

    - Con esta transformación se consigue que los coeficientes de cada factor en el modelo sean comparables.

  - **Poder de discriminación (poder predictivo)**

EJEMPLO DE FONDOS PROPIOS / BALANCE (%) (CURVA TRANSFORMADA)

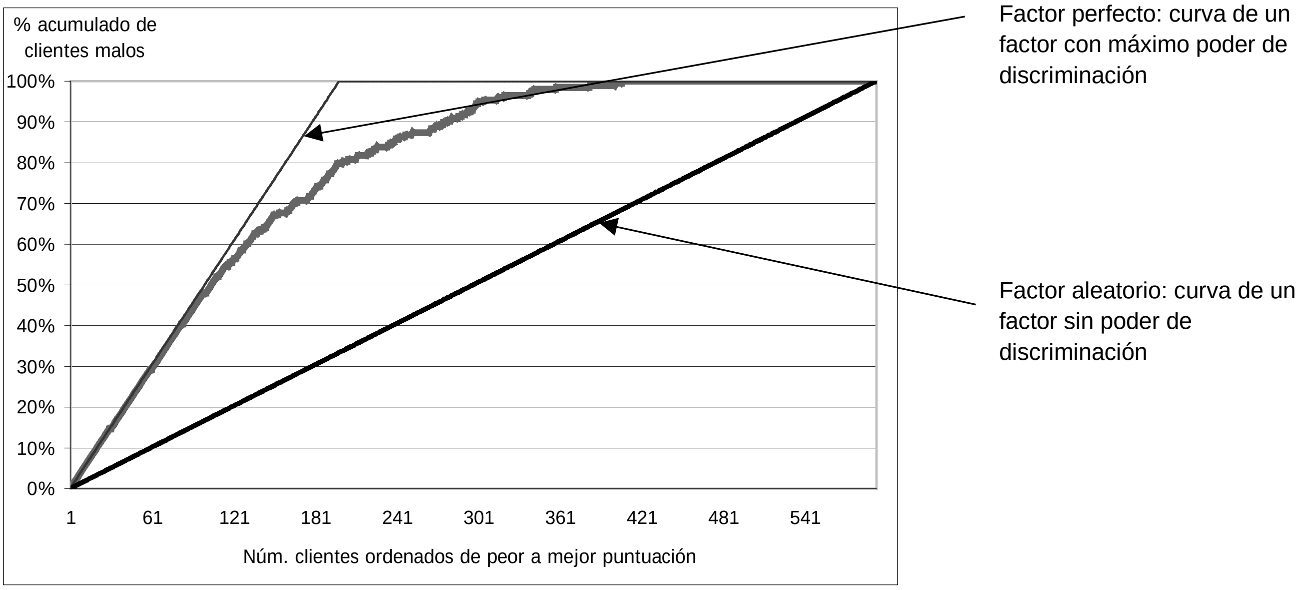


ANÁLISIS INDIVIDUAL DE LOS FACTORES

Poder de discriminación

Curvas de poder predictivo e índices de poder predictivo

EJEMPLO DE FONDOS PROPIOS / BALANCE (%)



ANÁLISIS DE CORRELACIONES

Además, a fin de evitar posibles inestabilidades debidas a altas corre-laciones de los factores utilizados, se calcula la matriz de correlaciones entre todos los factores.

NUM	MATRIZ DE CORRELACIONES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	FONDOS PROPIOS/ACTIVO FIJO	100%																						
2	FONDOS PROPIOS+DEUDA LP/ ACTIVO FIJO	77%	100%																					
3	DISPONIBLE+REALIZABLE/P CORTO	40%	50%	100%																				
4	% ACTIVO FIJO/TOTAL BALANCE	-51%	-57%	-19%	100%																			
5	ACTIVO FIJO MATERIAL/ACTIVO FIJO	-6%	-6%	-6%	13%	100%																		
6	ROTACIONES EXISTENCIAS	-6%	-15%	24%	25%	-4%	100%																	
7	ROTACIONES CLIENTES	9%	0%	-10%	21%	11%	18%	100%																
8	CLIENTES + EXISTENCIAS / F.PROPIOS	22%	6%	28%	45%	-1%	30%	51%	100%															
9	DEUDA FINANCIERA/FONDOS PROPIOS	62%	31%	27%	-7%	0%	4%	21%	47%	100%														
10	FONDOS PROPIOS S/BALANCE	57%	35%	37%	19%	8%	4%	27%	71%	71%	100%													
11	RATIO 11 CORREGIDO POR VALORES NEGATIVOS	40%	23%	19%	2%	-1%	0%	22%	45%	76%	57%	100%												
12	ROTACION PROVEEDORES	21%	16%	22%	-1%	14%	12%	27%	13%	16%	24%	0%	100%											
13	VARIACIÓN VENTAS	-9%	-2%	3%	-6%	-1%	1%	-3%	-10%	-9%	-11%	-5%	-3%	100%										
14	RESULTADO ORDINARIO/VENTAS	42%	29%	26%	5%	-4%	12%	24%	50%	47%	56%	35%	12%	-3%	100%									
15	MARGEN BRUTO EXPLOTACIÓN S/VENTAS	14%	7%	14%	25%	1%	7%	11%	44%	25%	43%	20%	-3%	-1%	69%	100%								
16	RESULTADO NETO S/VENTAS	37%	26%	25%	12%	0%	10%	26%	50%	42%	54%	31%	10%	-2%	88%	65%	100%							
17	RTDO NETO EXPLOTACIÓN S/VENTAS	21%	17%	14%	11%	-3%	5%	16%	38%	27%	40%	21%	-2%	2%	78%	87%	70%	100%						
18	GASTOS FINANCIEROS S/VENTAS	48%	28%	20%	-19%	3%	16%	26%	23%	49%	35%	36%	26%	-15%	35%	-3%	32%	-2%	100%					
19	BENEFICIO NETO / FONDOS PROPIOS	32%	23%	16%	-6%	3%	14%	25%	23%	26%	24%	13%	17%	3%	70%	44%	79%	52%	38%	100%				
20	RESULTADO EXPLOTACION NETOS/ACTIVO (ROI)	41%	31%	20%	-16%	7%	6%	16%	18%	32%	37%	13%	26%	-1%	66%	52%	57%	62%	20%	65%	100%			
21	SERVICIO DE LA DEUDA (AÑOS)	43%	23%	22%	-6%	-5%	16%	27%	41%	63%	49%	52%	13%	0%	66%	48%	58%	47%	49%	53%	51%	100%		
22	COBERTURA DE INTERESES	39%	22%	24%	7%	6%	15%	26%	45%	49%	54%	36%	15%	-6%	75%	57%	67%	51%	60%	59%	54%	73%	100%	
23	ACTIVO	14%	3%	7%	19%	-15%	12%	23%	44%	20%	31%	10%	0%	-12%	38%	35%	34%	32%	15%	19%	15%	22%	32%	100%

CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

🗐**Claramente ningún factor individual puede predecir la mora satisfactoriamente...**

🗐**Pero en este momento los factores ya están definidos, y tenemos las variables transformadas para poder desarrollar modelos con una combinación de factores**

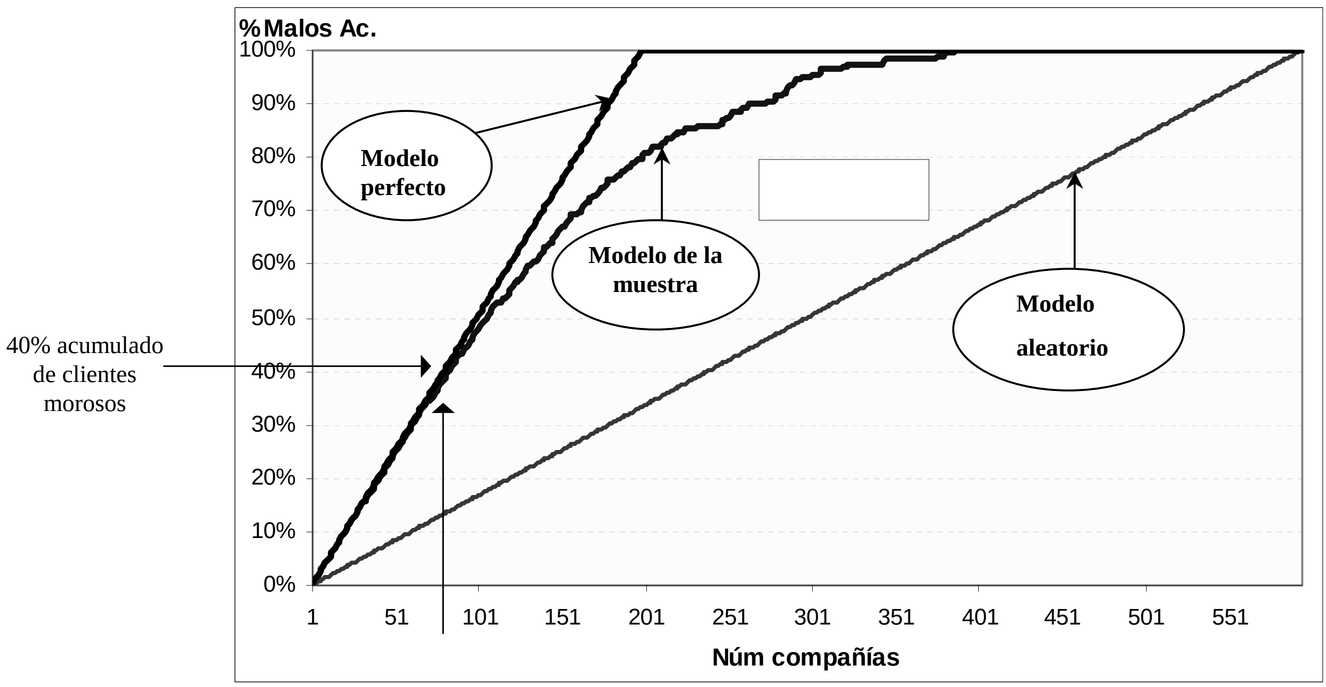
🗐**Se realizan modelos estadísticos: logit, probit...**

🗐**Pero como las variables analizadas son muchas más, encontramos muchos modelos con similar índice de predicción**

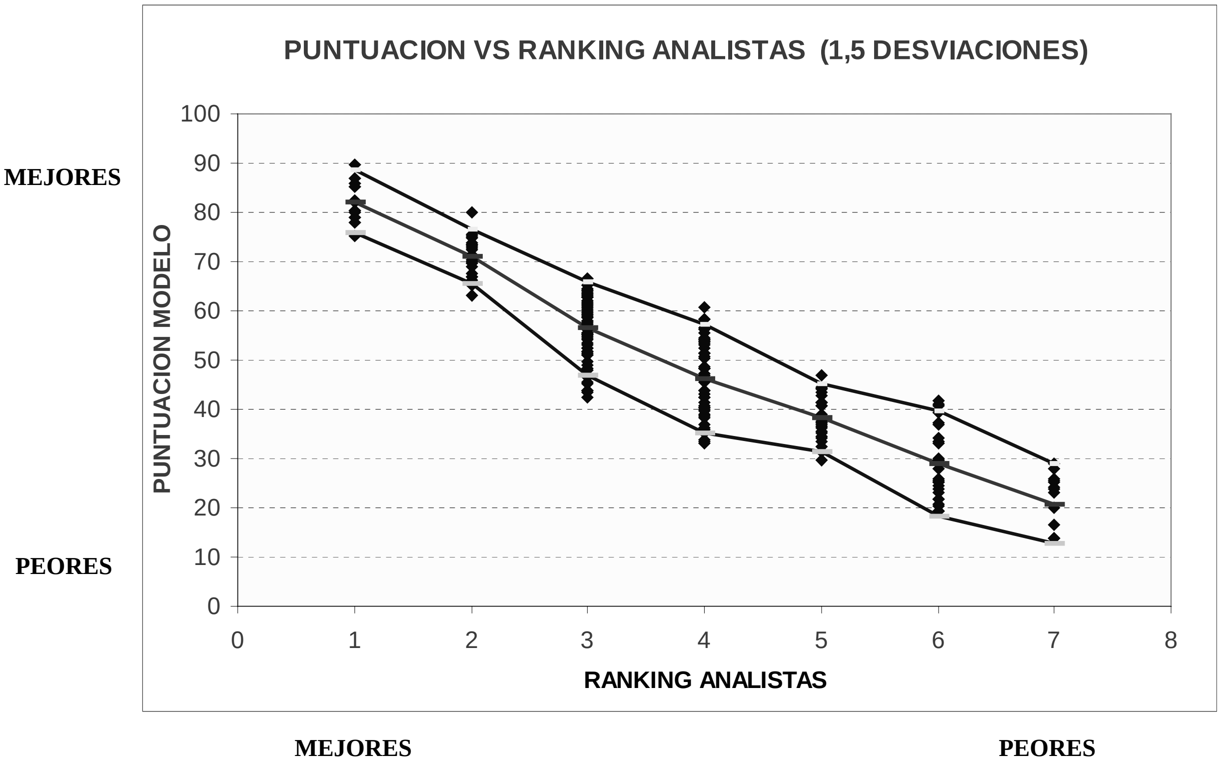
🗐**El modelo final se elige en colaboración con los expertos basándose en lo intuitivo del modelo y en su facilidad de comprensión / venta**

PODER DE PREDICCIÓN (POWERSTAT)

El poder de predicción del modelo se puede observar mediante el powerstat. Cuanto más cercano se encuentre del modelo perfecto mejor explicará el comportamiento.



PRUEBA DE COHERENCIA DEL MODELO



AJUSTAR LA MUESTRA A LA PROPORCIÓN REAL DE MALOS EN LA CARTERA

🗐**En la muestra utilizada para realizar el modelo que permite la ordenación de los clientes, se han cogido todos los clientes malos de la cartera, y el doble de buenos.**

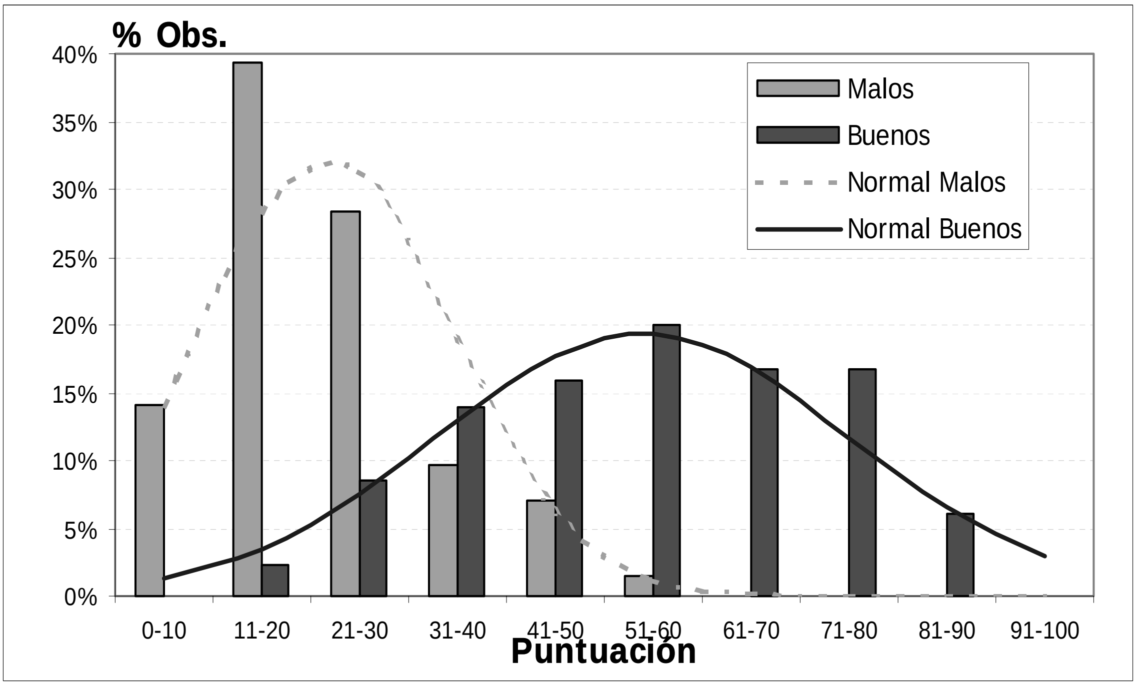
🗐 **Se han utilizado 1/3 malos y 2/3 buenos para evitar sobreponderar los clientes buenos y para asegurarnos que el modelo sea capaz de diferenciar entre buenos y malos.**

🗐**Partiendo de esta muestra con 1/3 malos y 2/3 buenos, es decir, una morosidad media del 33,3%, la probabilidad de que un cliente tomado al azar de la muestra sea mala es del 33,3%.**

🗐**Pero en la realidad la proporción de malos en la cartera es mucho menor. Es necesario ajustar los cálculos a la proporción real de malos sobre el total de casos.**

DISTRIBUCIÓN DE BUENOS - MALOS

Se pueden dibujar las distribuciones de puntuación de los buenos y de los malos, es razonable esperar formas acampanadas, cuanto más separadas estén las medias y más concentradas las puntuaciones alrededor de estas tanto mejor.

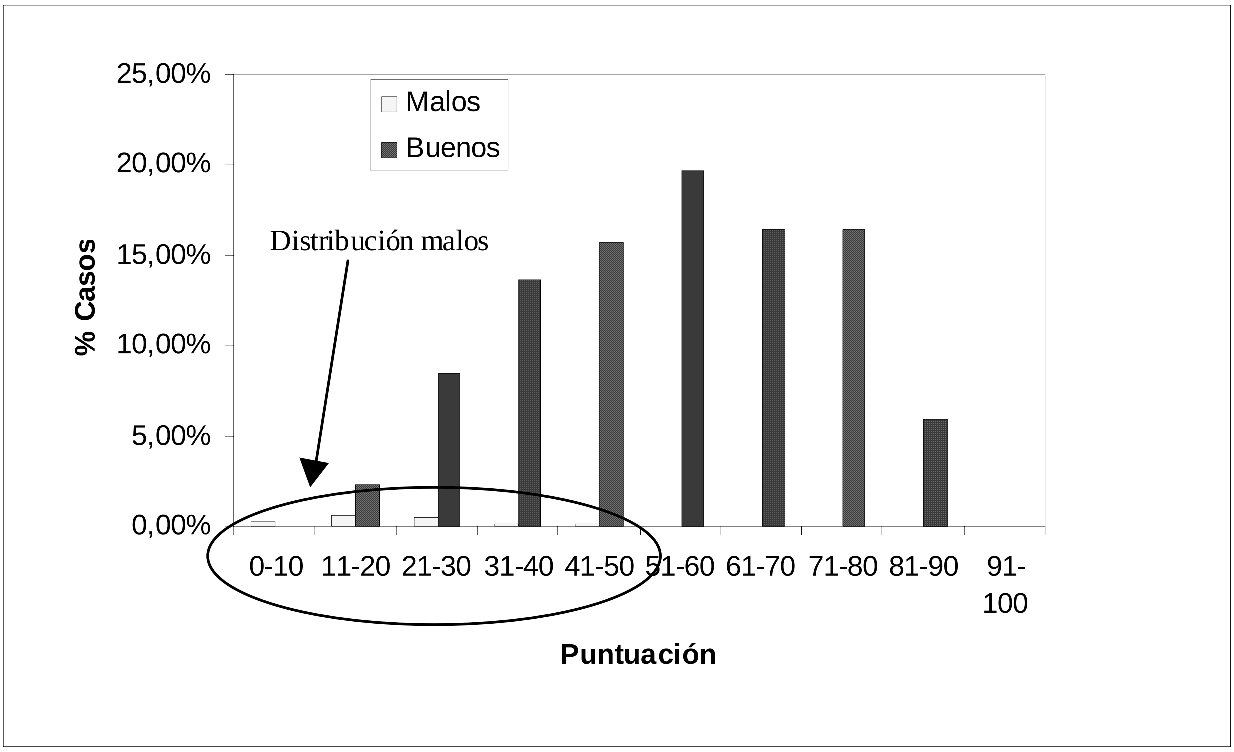


TASA MEDIA DE LA CARTERA (TMC)

- **Para realizar el ajuste de la tasa de morosidad de la muestra a la de la cartera se realizan los siguientes pasos:**
  - **Número de clientes buenos y malos de la muestra en cada uno de los trameados.**
  - **Porcentaje de clientes malos (vs total malos) y porcentaje de clientes buenos (vs total buenos) en cada uno de los trameados.**
  - **Ajustar los porcentajes de la muestra por la TMC.**

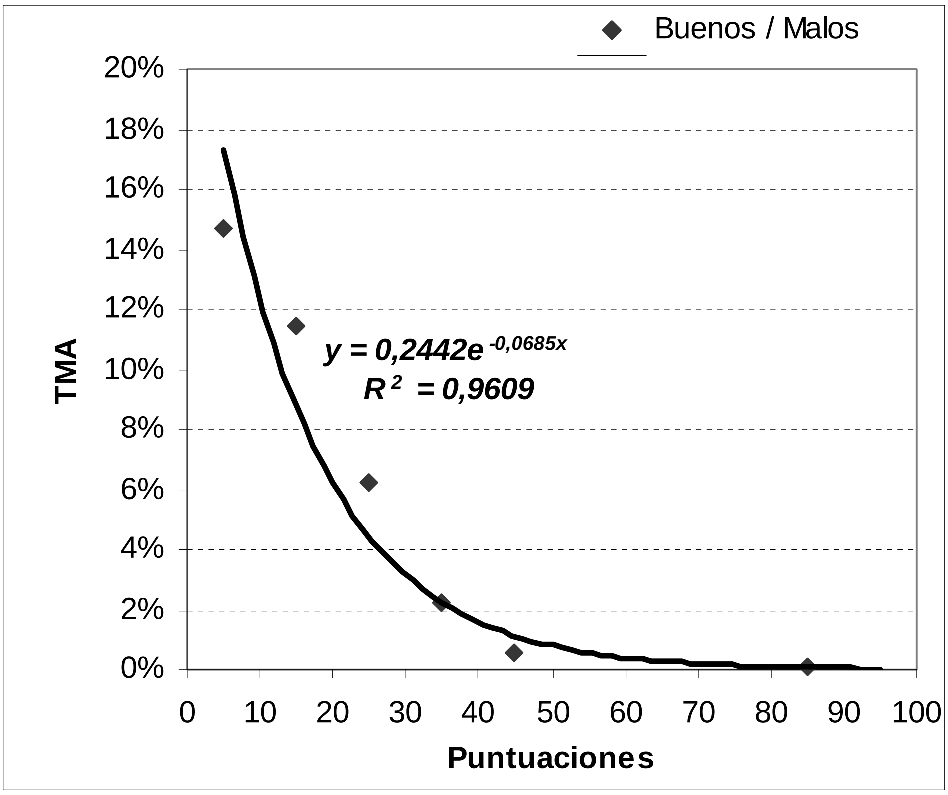
$$Tasa\_Morosidad_{AjustadaTMC} = \frac{TMC \cdot \left(\%Malos_{Dentro\ del\ Tramo}\right)}{TMC \cdot \left(\%Malos_{\substack{Dentro\ del \\ Tramo}}\right) + (1 - TMC) \cdot \left(\%Buenos_{\substack{Dentro\ del \\ Tramo}}\right)}$$

DISTRIBUCIONES DE BUENOS - MALOS AJUSTADAS A LA TMC



ASIGNAR TASAS DE MOROSIDAD ANTICIPADA A LA PUNTUACIÓN

Ajuste a una curva exponencial de forma que obtenemos para cada puntuación una probabilidad de incumplimiento



LA LGD, SEVERIDAD O SU COMPLEMENTARIO, LA TASA DE RECUPERACIÓN

TASAS DE RECUPERACIÓN

El riesgo de crédito, no solo depende de la probabilidad de default, también es función de la LGD (Loss Given Default) (1 menos la tasa de recuperación).

El proceso de defualt no necesariamente viene acompañado de la bancarrota (bankcruptcy). En la legislación americana, la bancarrota-quiebra viene legislada por lo denominados "Chapter 7" y "Chapter 11".

En los procedimientos de bancarrota existe el denominado orden de prelación que determina la prioridad de los acreedores al objeto de recuperar sus deudas.

En la parte alta de la cola están los "secured creditors" (con garantías y colaterales explícitos), en segundo lugar vienen los "priority creditors" que básicamente son prestamistas post-quiebra y finalmente los "general creditors", dentro de este ultimo grupo a su vez se establecen prioridades.

Obviamente, las tasas de recuperación son claramente diferentes según la tipología de las deudas

TASAS DE RECUPERACIÓN: Orden de prelación

La tabla adjunta presenta el orden de prioridad de los diferentes acreedores bajo la ley de quiebras americana:

TABLE 19-6: Pecking Order in U.S. Federal Bankruptcy Law

Seniority	Type of Creditor
Highest (paid first)	(1) Secured creditors (up to the extent of secured collateral) (2) Priority creditors: - Firms that lend money during bankruptcy period - Providers of goods an services during bankruptcy period (e.g. employees, laywers, vendors) - Taxes (3) General creditors: - Unsecured creditors before bankruptcy
Lowest (paid last)	- Shareholders

TASAS DE RECUPERACIÓN

Las agencias de rating publican periódicamente estudios acerca de las tasas de recuperación de emisiones de deuda. Para ello es típico utilizar el valor de la deuda justo poco después del incumplimiento. Con ello se asume que el precio de fija el mercado es el mejor estimador de la tasa futura de recuperación.

Existen, entre otros, dos factores esenciales que afectan a la tasa de recuperación:

- La “senioriy” de la deuda. Esto es, la posición de la misma dentro de la “cola” de acreedores.
- El estado de la economía. Al igual que en las tasas de incumplimiento el estado de la economía afecta a las tasas de recuperación, así las tasas de recuperación tienden a ser menores en momentos bajos del ciclo.

Un punto interesante es que los ratings que las agencias externas asignan a las emisiones pueden incluir la LGD, de manera que un mismo emisor puede tener diferentes ratings en diferentes emisiones en función de la LGD que se estime para las mismas.

TASAS DE RECUPERACIÓN

Las tablas adjuntas son un ejemplo de los estudios sobre tasas de recuperación.

TABLE 19-7: Moody's Recovery Rates for U.S. Corporate Debt

Seniority/Security	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	StDev.
Senior/Secured Bank Loans	15.00	60.00	75.00	69.91	88.00	98.00	23.47
Equipment Trust Bonds	8.00	26.25	70.63	59.96	85.00	103.00	31.08
Senior/Secured Bonds	7.50	31.00	53.00	52.31	65.25	125.00	25.15
Senior/Unsecured Bonds	0.50	30.75	48.00	48.84	67.00	122.60	25.01
Senior/Subordinated Bonds	0.50	21.34	35.50	39.46	53.47	123.00	24.59
Subordinated Bonds	1.00	19.62	30.00	33.17	42.94	99.13	20.78
Junior/Subordinated Bonds	3.63	11.38	16.25	19.69	24.00	50.00	13.85
Preferred Stocks	0.05	5.03	9.13	11.06	12.91	49.50	9.09
All	0.05	21.00	38.00	42.11	61.22	125.00	26.53

Source: Moody's, from 1970–1999 defaulted bond prices

TABLE 19-8: S&P's Historical Recovery Rates for Corporate Debt

Seniority ranking	Number of observations	Average issue size ($m)	Simple average Price	Standard deviation of Price	Weighted average Price
Senior secured	91	117.8	54.28	24.25	49.32
Senior unsecured	237	97.5	46.57	25.24	47.09
Subordinated	177	145.5	35.20	24.67	32.46
Junior subordinated	144	81.9	34.98	22.32	35.51
Total	649	110.0	41.98	25.23	40.23

Source: S&P, from 649 defaulted bond prices over 1981–1999.

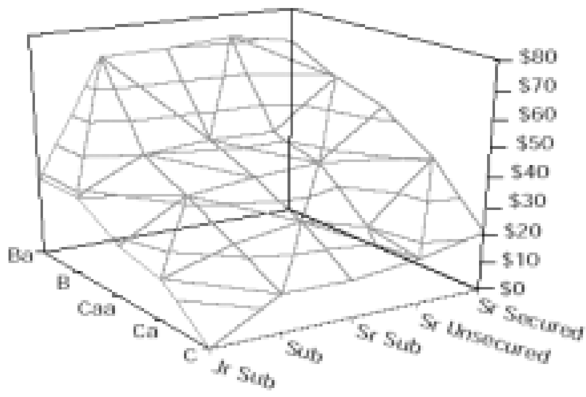
TASAS DE RECUPERACIÓN

Bank Loans	Count	Average	Median	Maximum	10th Percentile	Minimum	Standard Deviation
Sr. Secured	119	$69.5	$74.0	$98.0	$39.2	$15.0	$22.5
Sr. Unsecured	33	$52.1	$50.0	$88.0	$5.8	$5.0	$28.6
Long Term Public Debt (of these same Bank Loan Borrowers)							
Sr. Secured	6	$59.1	$49.0	$98.5	$30.0	$0.1	$32.6
Sr. Unsecured	51	$45.1	$44.0	$104.8	$16.0	$0.5	$25.7
Sr. Sub	55	$29.4	$24.0	$98.0	$4.0	$0.5	$23.6
Sub	32	$29.1	$29.3	$87.5	$4.5	$0.5	$20.6
Jr. Sub	5	$10.8	$12.5	$20.8	$3.7	$1.5	$7.2

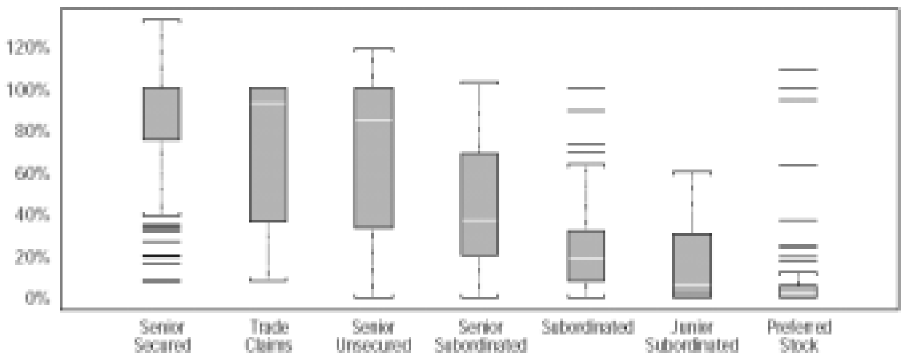
Exhibit 18
Average SpecStructure 1982-2001

Seniority/Security	Average Recovery 1982-2000	2001
Sr.Sec. Bank Loan	$67.06	$54.68
Equipment Trust	$64.65	NA
Sr. Secured	$52.09	$58.00
Sr. Unsecured	$43.82	$36.20
Sr. Sub.	$34.59	$19.90
Sub.	$31.88	$16.45
Jr. Sub.	$22.48	NA

Exhibit 19 - Average Recovery Rates by Rating at Default & Priority in Capital Structure

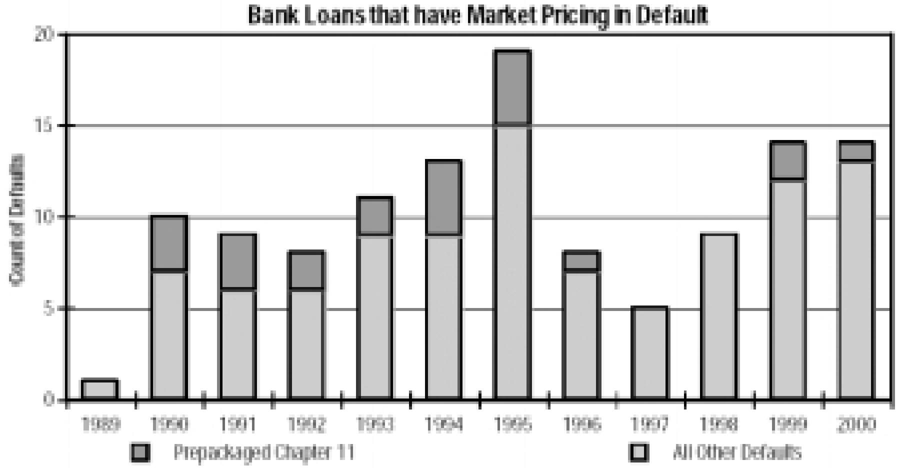


Recovery Rate Distributions by Seniority/Security



Bank Loan Defaults by Year 1989-2000(YTD)

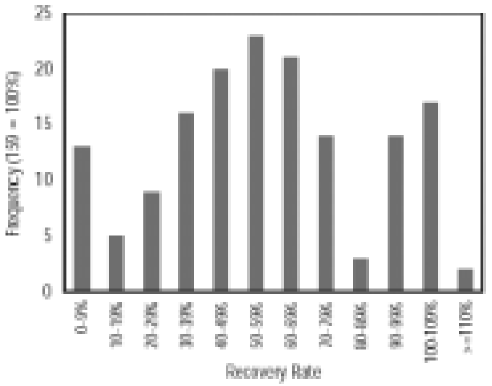
Bank Loans that have Market Pricing in Default



Firm-Level Recovery Rates by Year of Bankruptcy Resolution

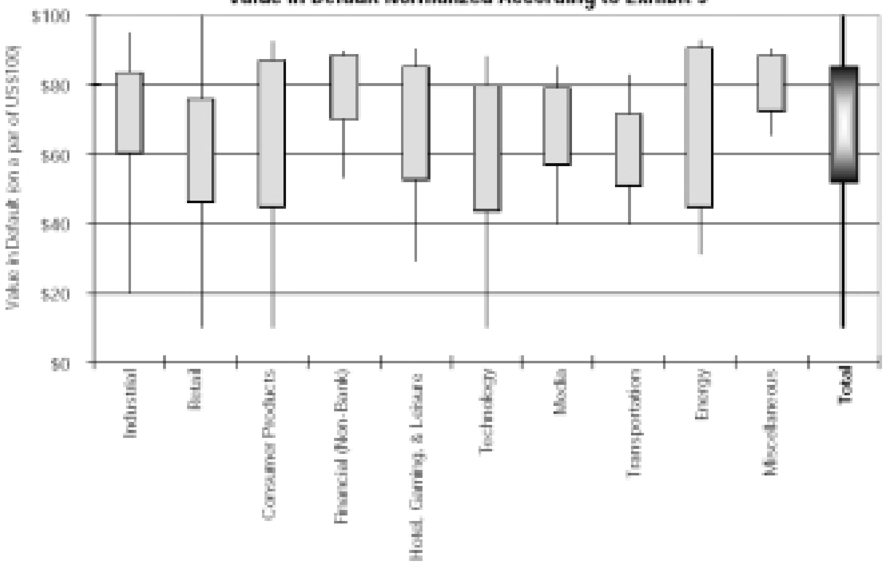
Exhibit 9

Weighted-Average Firm-Level Recovery Rate Distribution

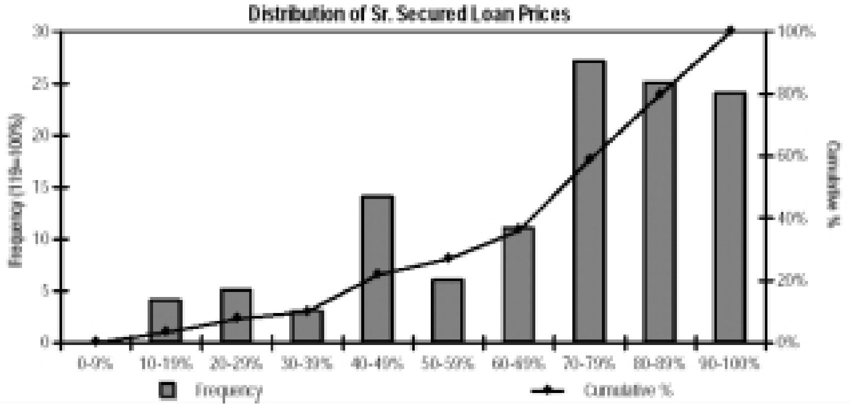


Bank Loans by Industry Group

Value in Default Normalized According to Exhibit 9



Bank Loan Value in Default
Distribution of Sr. Secured Loan Prices



Bank Loan Value in Default
Distribution of Sr. Unsecured Loan Prices

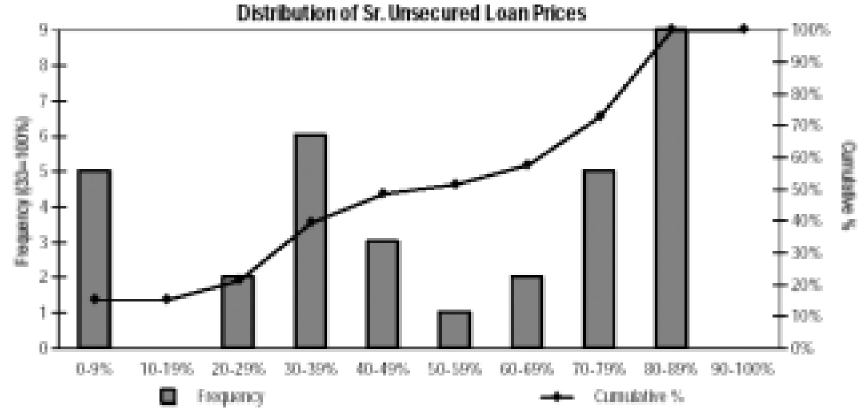


Exhibit 20
Issuer-level Recovery Rates for Bonds & Bank Loans, 1982-2001

	Rating One Year Prior to Default		
	Investment Grade	Speculative Grade	All Rated
Sr.Sec. Bank Loan	$68.33	$71.42	$71.28
Secured Bonds	$73.44	$52.76	$53.32
Sr. Unsecured Bonds	$52.48	$35.29	$36.57
Subordinated Bonds	$35.75	$31.74	$31.84

Exhibit 21 - Annual Average Spec-Grade Recovery Rates Inversely Correlated with Default Rates

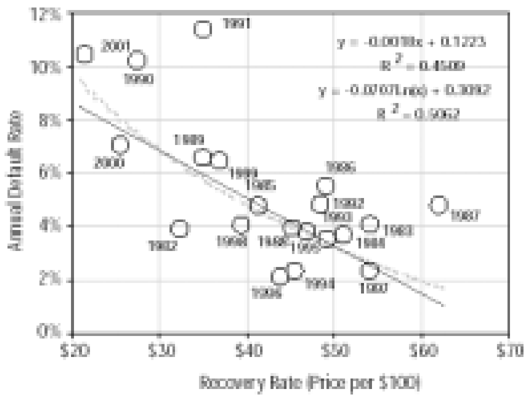


Exhibit 22 - Average One-Year Credit Loss Rates, 1982-2001

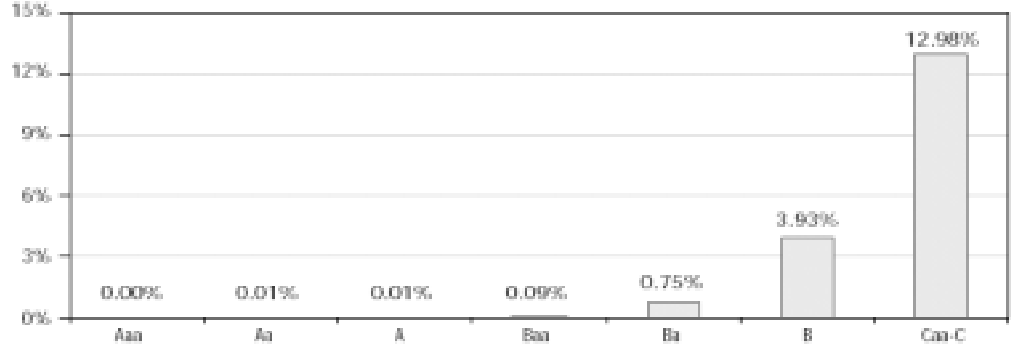
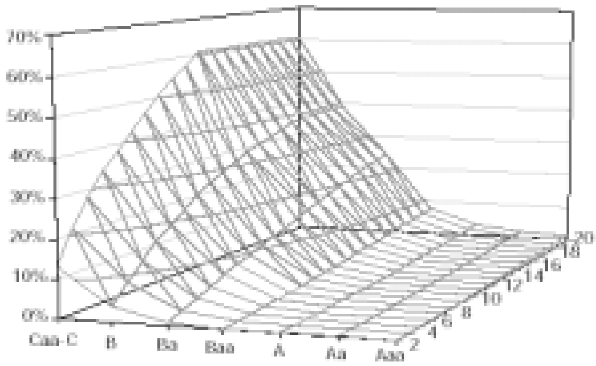


Exhibit 24 - Cumulative Historical Credit Loss Rates by Rating Notch, 1982-2001

Constant Recovery Rate



UNA APLICACIÓN:

ANALISIS DE TITULIZACIONES CON EL MODELO DE BASILEA 2

Un CDO (Collateralised Debt Obligation) es una titulización de obligaciones en la que ciertos activos (p.ej. préstamos comerciales, bonos, asset-backed securities) se venden a una SPV que los utiliza como colateral para emitir títulos.

Nuestro propçosito es diseñar un modelo que permita medir la calidad crediticia de un CDO así como las características de riesgo de cada trancha del mismo (en términos de probabilidad de incumplimiento, severidad, pérdida esperada y pérdida no esperada).

Partimos de una cartera base que se quiere estructurar en un CDO del siguiente tipo:

Cartera Base
Rating medio BBB

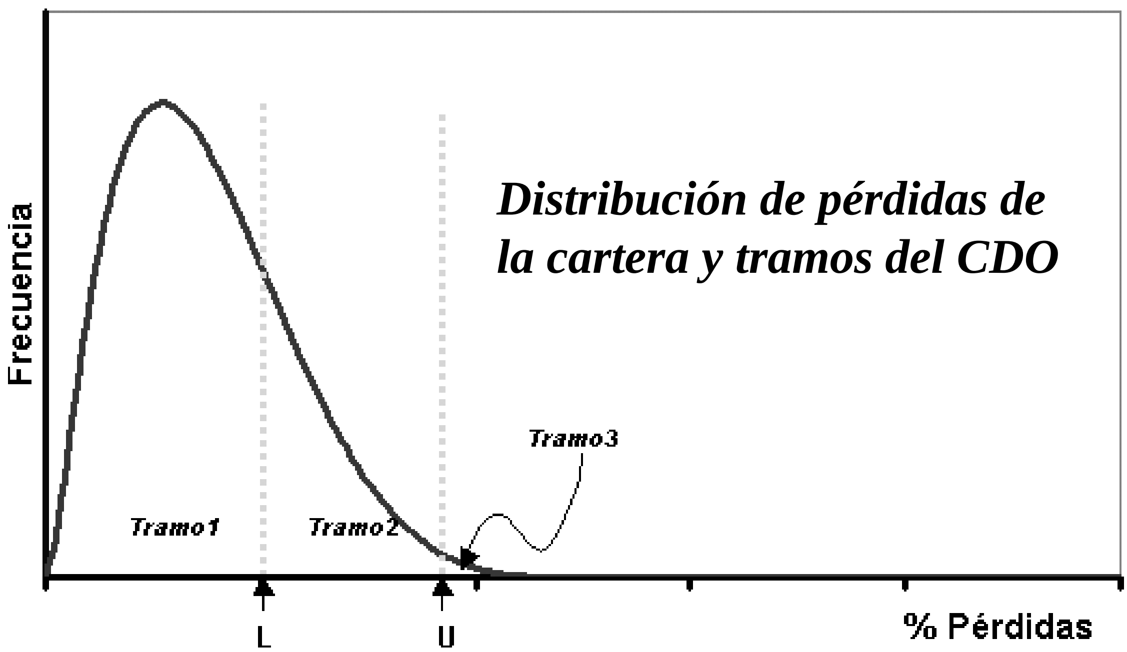
CDO		
Tipo de Tramo	***Rating***	***Porcentaje***
Super Senior	AAA+	85.50%
Tramo 1	AAA	5.00%
Tramo 2	Aa2	2.50%
Tramo 3	Baa1	3.00%
Equity	NR	4.00%

El objetivo es saber la distribución de pérdidas a la que podemos estar expuestos. Una posibilidad para conocer esta distribución es recurrir a la simulación de Montecarlo. Otra alternativa sería la de recurrir a aproximaciones analíticas. Siguiendo la filosofía del modelo BIS II , es posible aproximar las distribuciones de pérdidas a partir de una PD media, LGD media y una correlación de activos media para la cartera de activos titulizados. Como es bien sabido, las distribuciones de pérdidas que se obtendrían son del siguiente tipo:

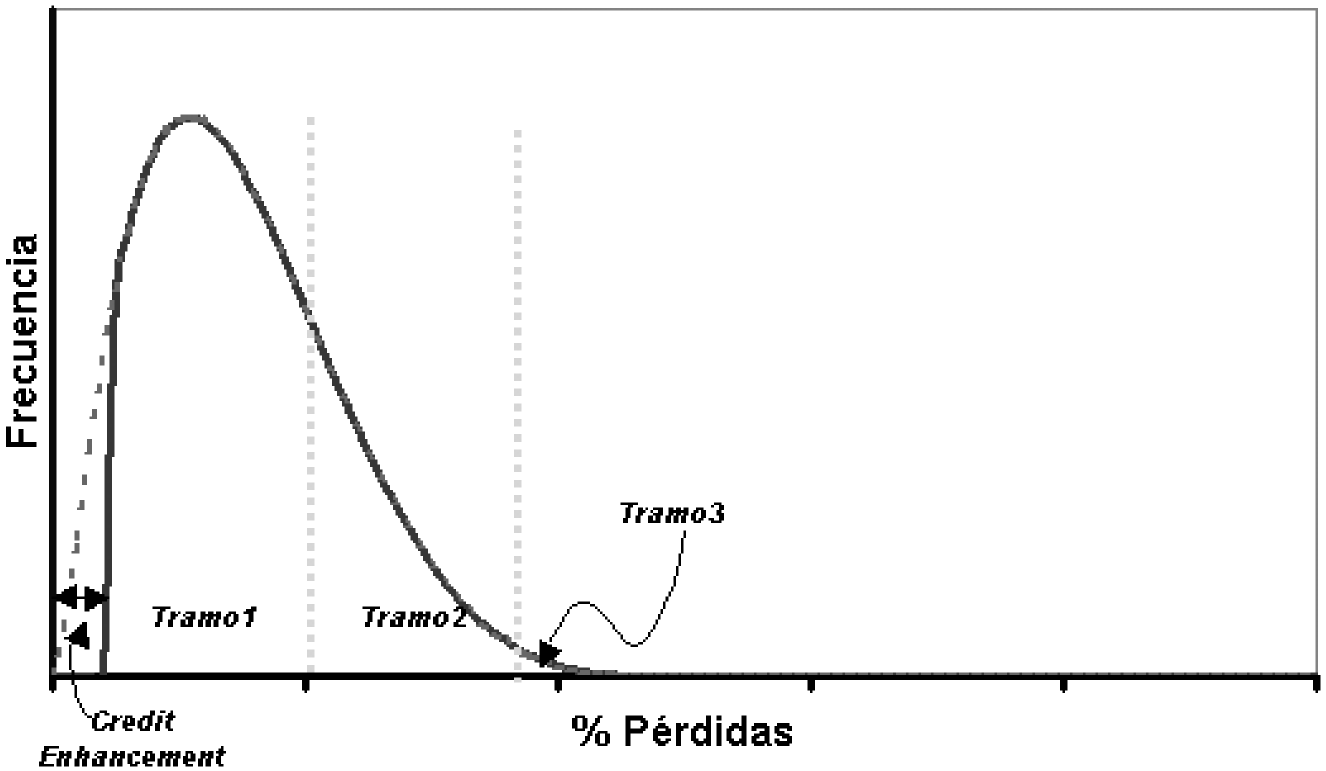
$$F(c) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \cdot \left[\sqrt{1-\rho} \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{c}{LGD}\right) - \Phi^{-1}(PD)\right]\right)$$

$$f(c) = \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \cdot \exp\left\{\frac{1}{2} \cdot \left[\Phi^{-1}\left(\frac{c}{LGD}\right)\right]^2 - \frac{1}{2\rho} \cdot \left[\sqrt{1-\rho} \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{c}{LGD}\right) - \Phi^{-1}(PD)\right]^2\right\} \cdot \frac{1}{LGD}$$

De forma alternativa, se podrían utilizar otro tipo de distribuciones, como por ejemplo las distribuciones Gamma o Beta. Estas distribuciones, aunque permiten obtener resultados aproximados buenos, no tienen base teórica fundamentada.

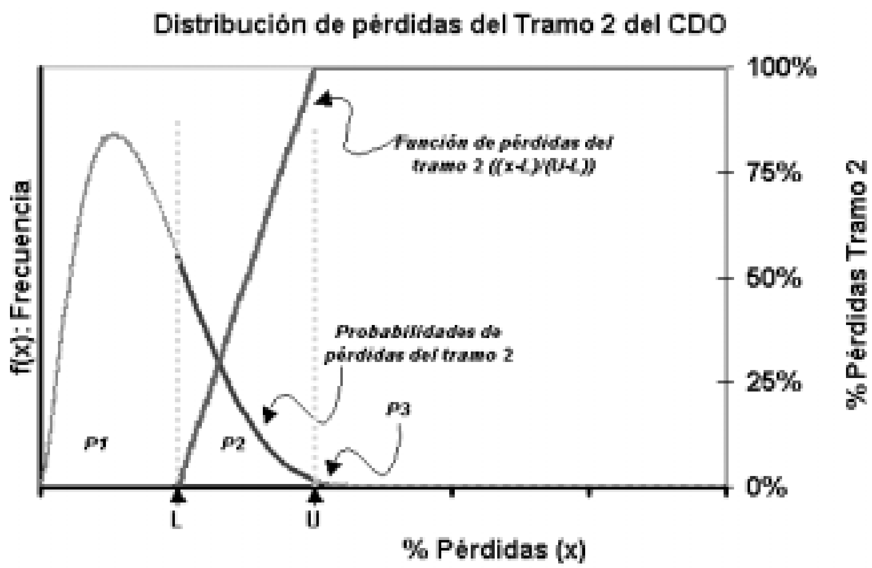


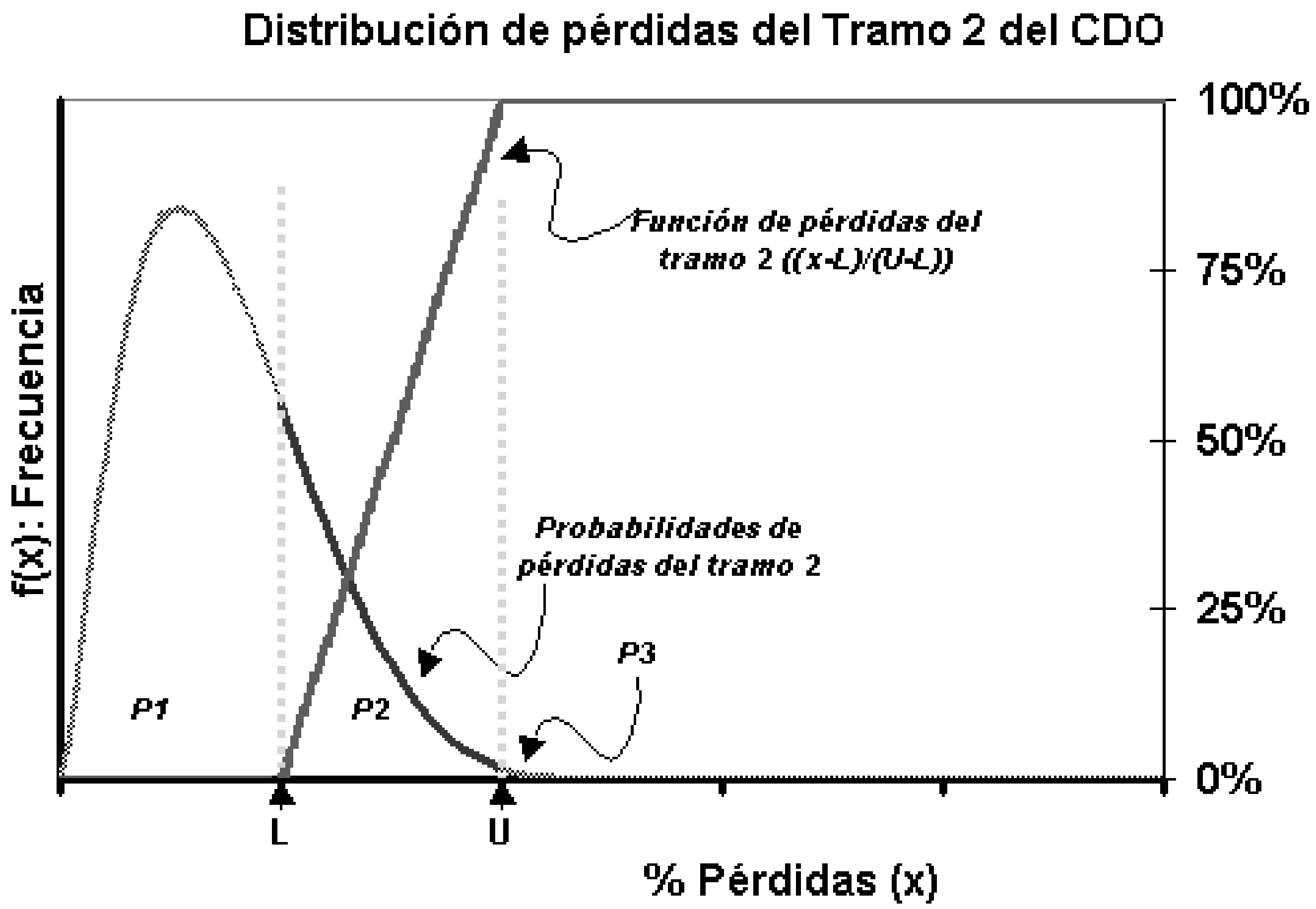
A la luz del gráfico anterior, se observa que la probabilidad de que el Tramo 1 incumpla es del 100%. Es por ello por lo que cuando se estructura la operación, se suele incluir un credit enhancement con cargo al margen que generan las posiciones: de esta manera las primeras pérdidas suponen una reducción del margen pero no son traspasadas. El credit enhancement supone una disminución de la probabilidad de impago de todos los tramos (mejora el rating):



Distribución de pérdidas del CDO con credit enhancement

Cuando las agencias de rating califican los distintos tramos de un CDO no están calificando siguiendo estrictamente un criterio de PD para cada uno de los tramos, sino más bien lo que tienen en cuenta cual puede ser la EL de cada tramo. Con una matemática “muy sencilla” es relativamente fácil caracterizar cada tramo del CDO como un bono de unas determinadas características: PD y LGD. Para ello hay que conocer la distribución de pérdidas y las probabilidades de ocurrencia. Tomemos un ejemplo de CDO en el que sólo existen tres tramos y pretendemos caracterizar el tramo 2:





El tramo 2 sólo soportará pérdidas si las pérdidas superan el umbral L, momento a partir del cual irá soportando todas las pérdidas que vayan ocurriendo hasta el umbral U (ahí las pérdidas del tramo serían del 100% de la exposición).

$$1 - F(L) \longrightarrow PD_2 = 1 - P_1$$

Por otra parte, sabemos que la pérdida esperada del tramo 2 es

Distribución de pérdidas

$$EL_2 = \int_{0\%}^{100\%} x \cdot f(x) \cdot dx$$

$$= \int_{0\%}^{L} 0\% \cdot f(x) \cdot dx + \int_{L}^{U} \left(\frac{x - L}{U - L} \right) \cdot f(x) \cdot dx + \int_{U}^{100\%} 100\% \cdot f(x) \cdot dx$$

$$\boxed{EL_2 = 0\% \cdot \underbrace{P_1}_{F(L)} + \int_{L}^{U} \left(\frac{x - L}{U - L} \right) \cdot f(x) \cdot dx + 100\% \cdot \underbrace{PD_3}_{1 - F(U)}}$$

donde $PD_3 = 1 - P_1 - P_2$.

y que

$$EL_2 = PD_2 \cdot \overline{LGD_2}$$

Por lo que tenemos ya se puede calcular la LGD media que está implícita en ese tramo del CDO, siendo posible caracterizar a dicho tramo como un bono de PD y LGD dada:

$$(1 - P_1) \cdot \overline{LGD_2} = 0\% \cdot P_1 + \int_L^U \left(\frac{x - L}{U - L} \right) \cdot f(x) \cdot dx + 100\% \cdot PD_3$$

$$\boxed{\overline{LGD_2} = \frac{EL_2}{PD_2} = \frac{0\% \cdot P_1 + \int_L^U \left(\frac{x - L}{U - L} \right) \cdot f(x) \cdot dx + 100\% \cdot PD_3}{(1 - P_1)}}$$

También podemos calcular la volatilidad de la LGD de cada tramo, a partir de la pérdida no esperada del tramo en cuestión:

$$\begin{aligned} {UL_2}^2 &= \int_{0\%}^{100\%} (x - EL_2)^2 \cdot f(x) \cdot dx \\ &= \int_{0\%}^{100\%} x^2 \cdot f(x) \cdot dx - EL_2^2 \\ &= \int_{0\%}^{L} (0\%)^2 \cdot f(x) \cdot dx + \int_L^U \left(\frac{x - L}{U - L} \right)^2 \cdot f(x) \cdot dx + \int_U^{100\%} (100\%)^2 \cdot f(x) \cdot dx - EL_2^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{{UL_2}^2 = \int_L^U \left(\frac{x - L}{U - L} \right)^2 \cdot f(x) \cdot dx + PD_3 - EL_2^2}$$

$$1 - F(U)$$

y que

$$UL_2 = \sqrt{PD_2 \cdot \sigma_{LGD_1}^2 + \overline{LGD_2}^2 \cdot PD_2 \cdot (1 - PD_2)}$$

Asumiendo independencia entre la severidad y el default

Por lo que tenemos ya se puede calcular la volatilidad de la LGD del tramo:

$$PD_2 \cdot \sigma^2_{LGD_2} + \overline{LGD_2}^2 \cdot PD_2 \cdot (1 - PD_2) = \int_L^U \left(\frac{x-L}{U-L}\right)^2 \cdot f(x) \cdot dx + PD_3 - EL_2^2$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_{LGD_2} &= \sqrt{\frac{UL_2^{\;2} - \overline{LGD_2}^2 \cdot PD_2 \cdot (1 - PD_2)}{PD_2}} \\ &= \sqrt{\frac{\int_L^U \left(\frac{x-L}{U-L}\right)^2 \cdot f(x) \cdot dx + PD_3 - EL_2^2 - \overline{LGD_2}^2 \cdot PD_2 \cdot (1 - PD_2)}{PD_2}}\end{aligned}}$$

Por tanto, lo que ocurre es que aunque todos los activos que se usan como referencia en el CDO puedan tener la misma LGD, cada uno de los tramos del CDO tiene una LGD y una volatilidad de la LGD diferentes.

Por ahora se ha dejado de lado como determinar la PD media, LGD media y la correlación de activos media que asignar a la cartera de activos que se tituliza.

La cartera CDO está compuesta por “M” activos, donde M puede ser un número “pequeño”.

La PD media se puede aproximar a partir de los activos subyacentes del CDO sintético. De la misma forma, la LGD media también se puede aproximar como la media de las LGD de los M activos. Suponiendo que el peso de la inversión en cada uno de los M activos (frente a la inversión total en el CDO) es ω_j :

$$PD_C = \sum_{j=1}^{M} \omega_j \cdot PD_j \qquad\qquad LGD_C = \sum_{j=1}^{M} \omega_j \cdot LGD_j$$

Queda por determinar la correlación de activos media.

Una posibilidad sería estimarla como la correlación media empírica de los activos. El problema de proceder de esta forma es que si estimamos el capital económico a partir de la distribución de Basilea con los tres parámetros estimados (PD_C, LGD_C y correlación media empírica), éste infravalorará el capital económico real asociado a esta cartera de M activos. La razón es que la aproximación de BIS II hace el supuesto de que el número de activos de la cartera es lo suficientemente grande (tiende a infinito), mientras que en realidad el número de activos del CDO, M, puede ser pequeño.

Una posible solución para tener en cuenta que el número de activos M no es infinito sería introducir un ajuste en las funciones de distribución de BIS II. De hecho, un ajuste así, denominado ajuste de granularidad, se consideraba en la propuesta original de BIS II. Este ajuste se basa en el uso de un índice de Herfindahl de la cartera.

Si el numero de activos, M, es suficientemente grande, utilizar una correlación promedia ponderada puede ser adecuado.

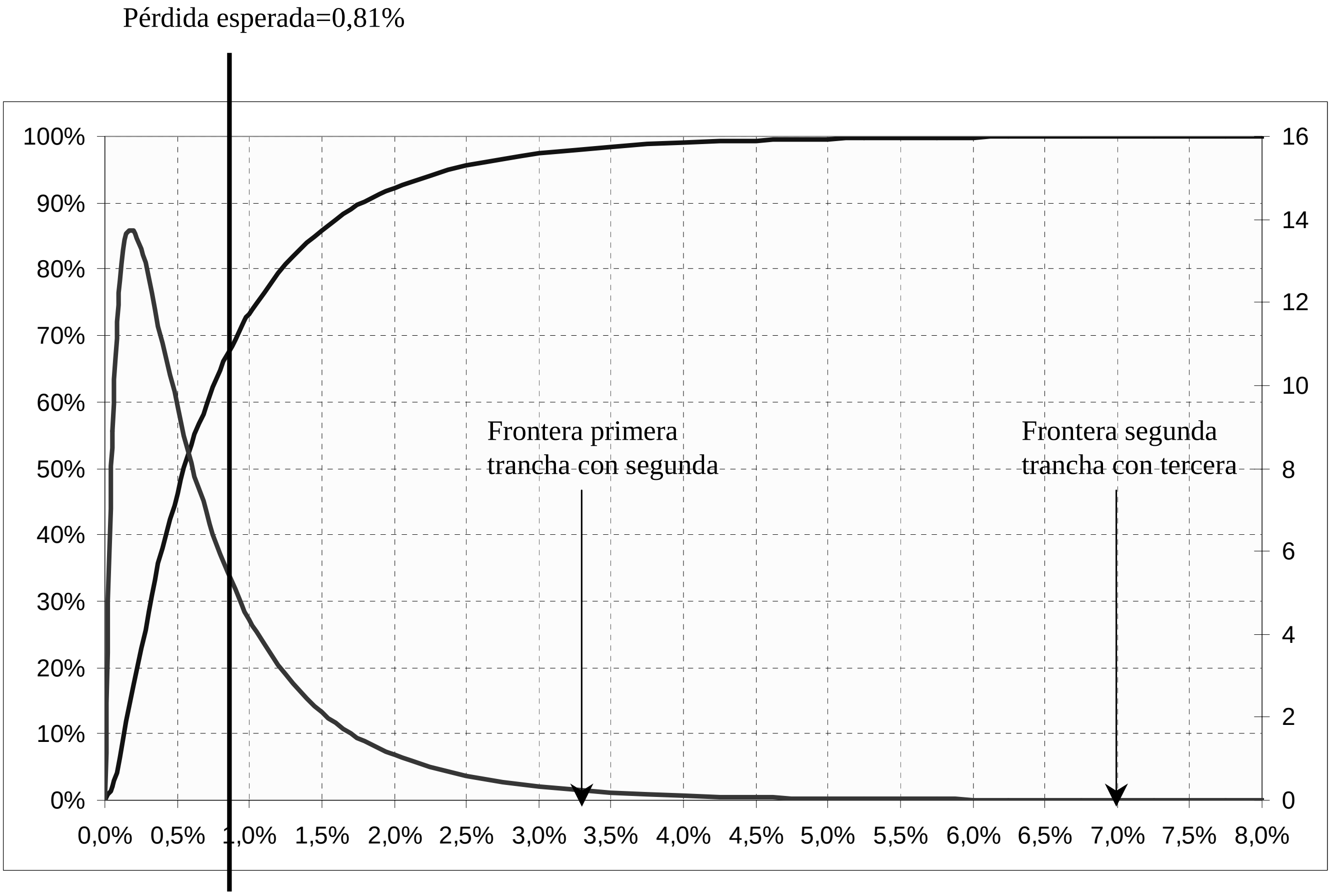
Una vez estimados los parámetros PD_C, LGD_C, y ρ_C , ya somos capaces de obtener la función de densidad de pérdidas del CDO.

En consecuencia, podemos proceder a la estimación, para cada uno de los tramos, de su *PD, EL, UL (Unexpected Loss),* utilizando la metodología explicada anteriormente.

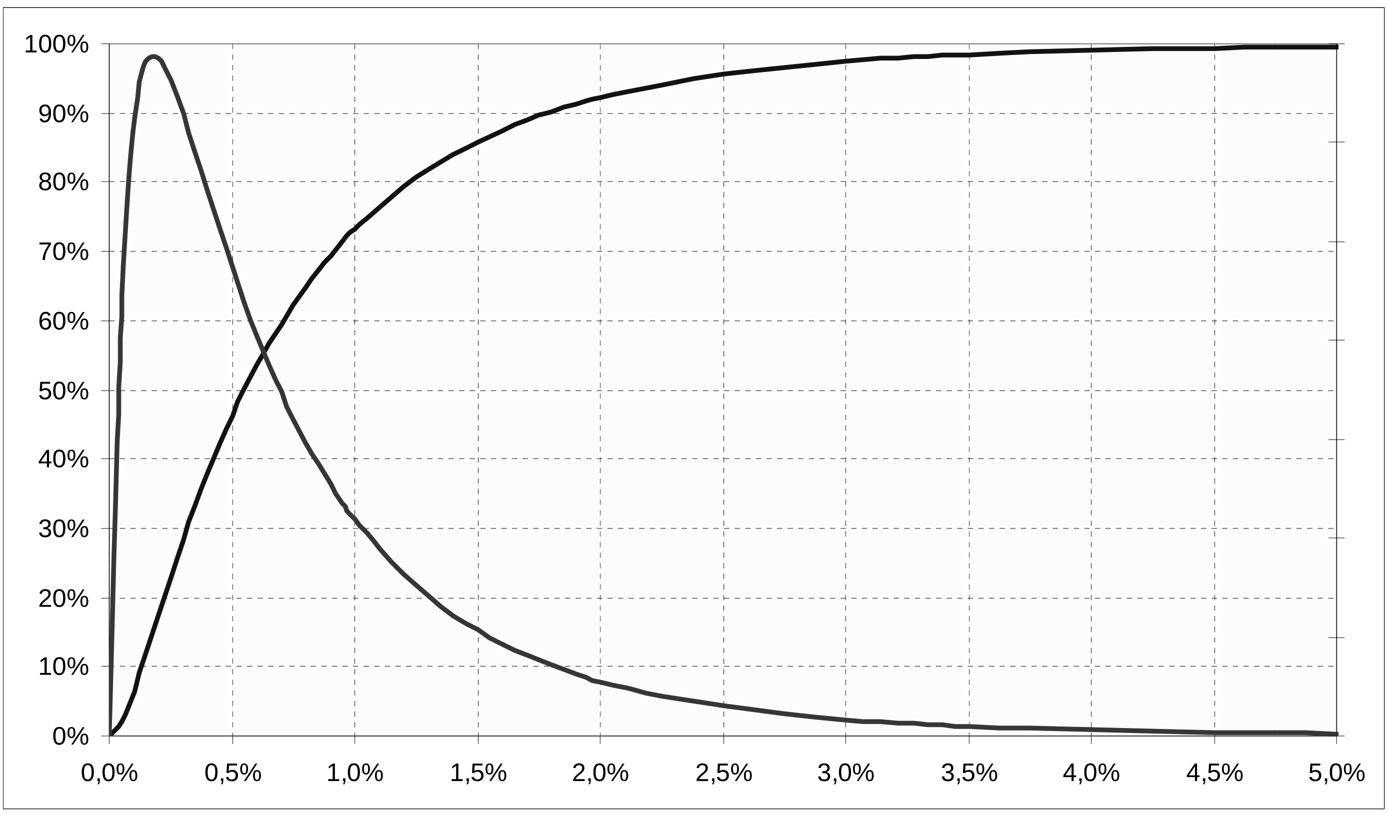
Veamos a continuación un ejemplo:

- PD media: 2,3%
- Severidad Media: 35%
- Correlación media: 14%
- Pérdida esperada media: 0,81%

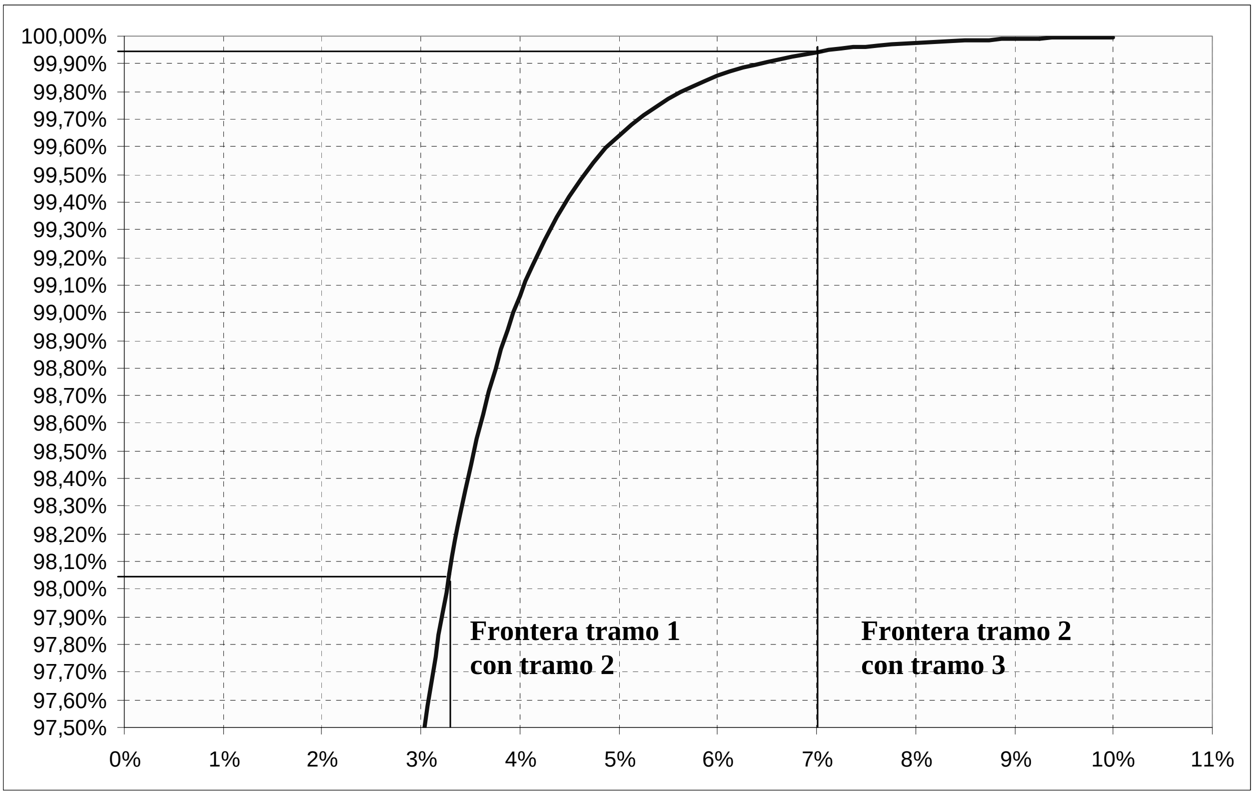
Distribución de pérdida crediticias de la cartera:



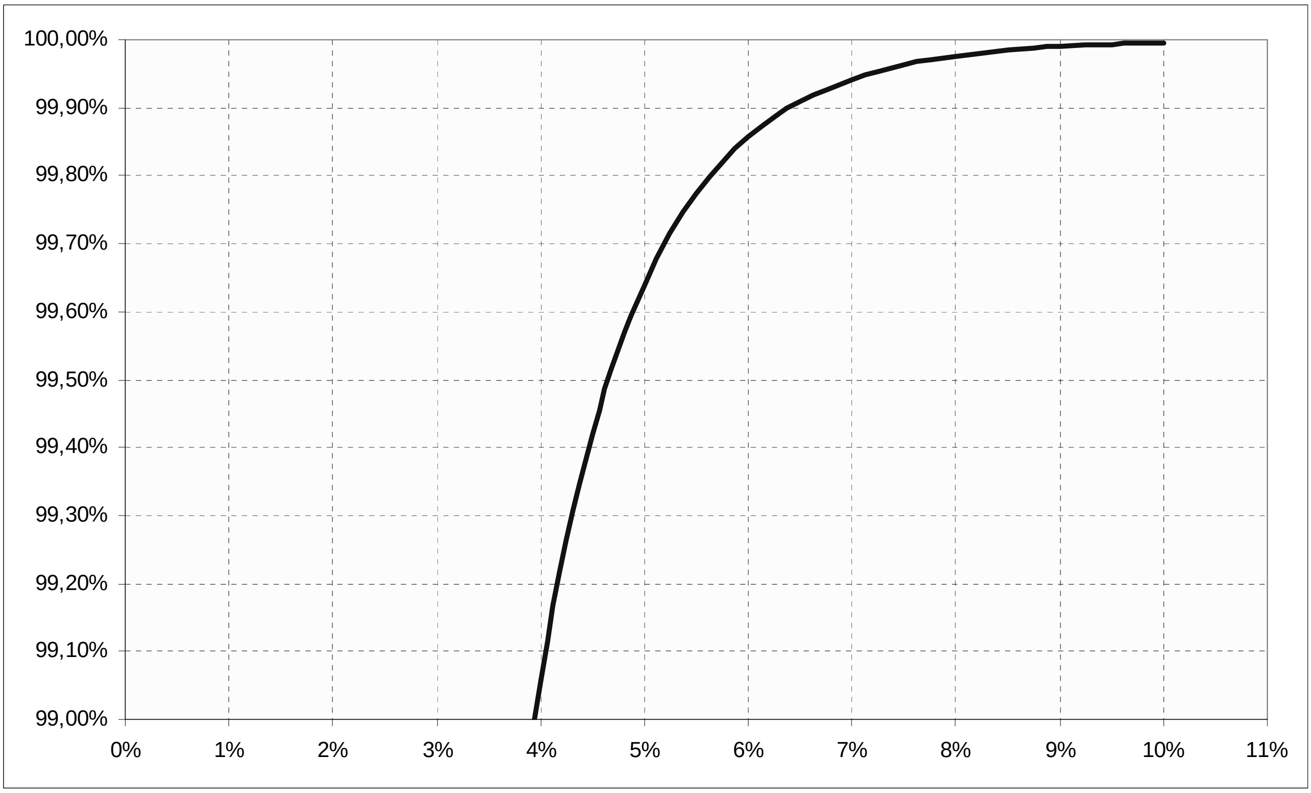
Distribución de pérdida crediticias de la cartera: Detalle



Distribución acumulada de pérdida crediticias de la cartera. Detalle:



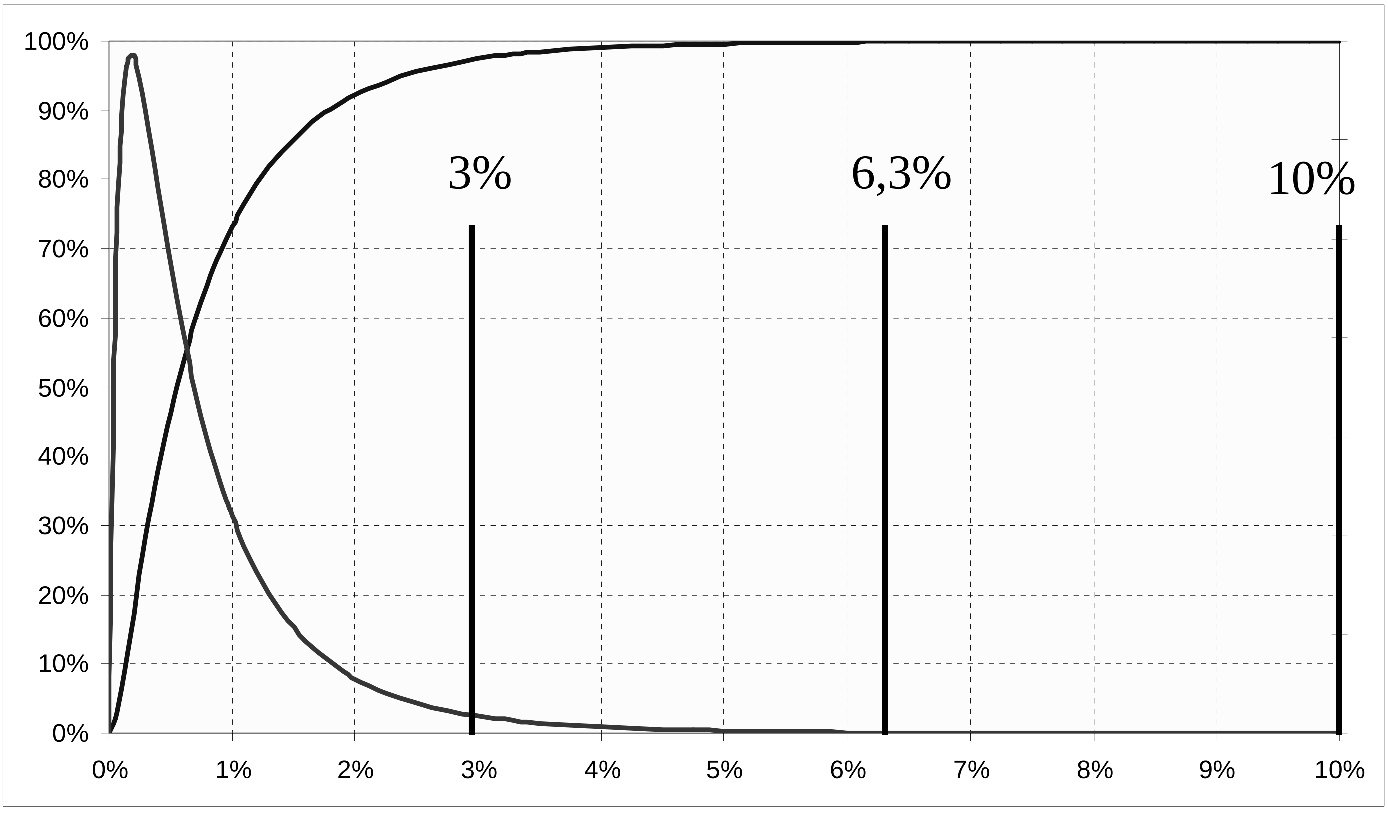
Detalle de pérdida crediticias para niveles de confianza superiores al 99%:



Solución sin credit enhancement

				PLAZO 1 AÑO					RATING
Tramo	Rating	Expos.	(%)	PD	EL	LGD	UL	Volat.	ESTIMADO
Mejora Crediticia					% Exp	media	% Exp	LGD	
Tramo 1	BBB	31,3	3,3%	100%	23,83%	23,83%	22,07%	22,07%	CCC+
Tramo 2	A / AA	35,2	3,7%	1,94%	0,52%	26,90%	5,11%	25,32%	BB
Tramo 3	AA+ / AAA	883,5	93,0%	0,06%	0,001%	1,23%	0,04%	1,24%	AAA
		950	100,0%		0,81%				

Credit enhancement del 3%



Solución con credit enhancement del 3%

				PLAZO 1 AÑO					RATING
Tramo	Rating	Expos.	(%)	PD	EL	LGD	UL	Vol.	ESTIMADO
					% Exp	media	% Exp	LGD	
Mejora Crediticia		28,5	3,0%	100%	25,94%	25,94%	23,51%	23,51%	
Tramo 1	BBB	31,3	3,3%	2,63%	0,77%	29,33%	6,41%	26,96%	BB
Tramo 2	A / AA	35,2	3,7%	0,11%	0,03%	29,42%	1,33%	26,65%	A+
Tramo 3	AA+ / AAA	883,5	93,0%	0,004%	0,000%	1,28%	0,01%	1,27%	AAA
		950	**100%**		**0,03%**				
					0,81%				

ANEXO I

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE DEFAULTS PARA EL CASO UNIFACTORIAL

Derivación de la distribución de defaults en un modelo unifactorial (I)

El valor de los activos de la empresa "i" está "dirigido" por un factor común *f*

$$V_i = \sqrt{\rho} \cdot f + \sqrt{1-\rho} \cdot \xi_i$$

Existe una relación entre la probabilidad de incumplimiento de la empresa "i" y la barrera de default K_i.

$$p_i = P(V_i \le K_i) = \Phi(K_i) \rightarrow K_i = \Phi^{-1}(p_i)$$

Es posible calcular la probabilidad de default condicionada a la realización del factor f.

$$p_i(y) = P[V_i(T) < K_i \mid f = y] = P\left[\sqrt{\rho} \cdot f + \sqrt{1-\rho} \cdot \xi_i < K_i \mid f = y\right] =$$

$$= P\left[\xi_i < \frac{K_i - \sqrt{\rho} \cdot f}{\sqrt{1-\rho}} \mid f = y\right] = \Phi\left(\frac{K_i - \sqrt{\rho} \cdot y}{\sqrt{1-\rho}}\right)$$

Condicionando a la realización del factor f, los defaults de la cartera son variables independientes. Aplicando la ley de los grandes números se puede afirmar que con probabilidad 1 la tasa de defaults será igual a la probabilidad condicionada de default

$$P[X = p(y) \mid Y = y] = 1$$

Derivación de la distribución de defaults en un modelo unifactorial (II)

Aplicando la ley de las esperanzas iteradas se tiene...

$$P[X \le x] = E[P[X \le x \mid Y]]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} P[X \le x \mid Y = y] \cdot \phi(y) \cdot dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} P[X = p(y) \le x \mid Y = y] \cdot \phi(y) \cdot dy$$

La integral anterior se puede resolver analíticamente

$$P[X \le x] = \int_{-\infty}^{\infty} P[X = p(y) \le x \mid Y = y] \cdot \phi(y) \cdot dy =$$

$$\int_{-\infty}^{\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\left(K - \sqrt{1-\rho}\cdot\Phi^{-1}(x)\right)} 0 \cdot \phi(y) \cdot dy + \int_{\frac{1}{\sqrt{\rho}}\cdot\left(K - \sqrt{1-\rho}\cdot\Phi^{-1}(x)\right)}^{\infty} 1 \cdot \phi(y) \cdot dy =$$

$$1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \cdot \left(K - \sqrt{1-\rho} \cdot \Phi^{-1}(x)\right)\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \cdot \left(\sqrt{1-\rho} \cdot \Phi^{-1}(x)\right) - K\right)$$

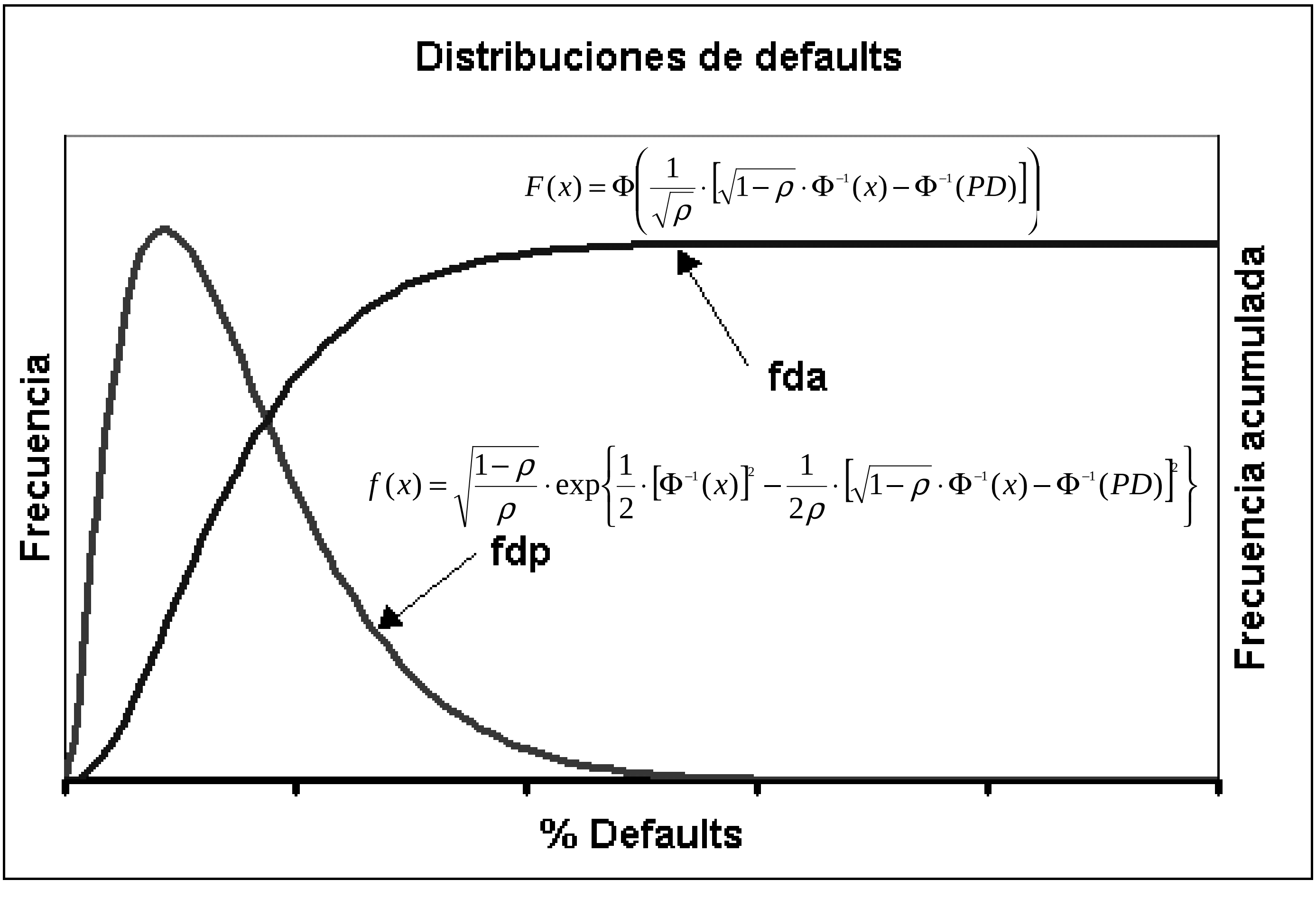
Así se obtiene la función de distribución acumulada

$$F(x) = P[X \le x] = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\left(\sqrt{1-\rho} \cdot \Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(p)\right)\right)$$

La función de distribución acumulada (fda) y la función de densidad de probabilidad (fdp) para un determinado porcentaje de defaults *x*, utilizadas en el modelo BIS II, vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \cdot \left[\sqrt{1-\rho} \cdot \Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(PD) \right] \right)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \cdot \exp\left\{ \frac{1}{2} \cdot \left[\Phi^{-1}(x) \right]^2 - \frac{1}{2\rho} \cdot \left[\sqrt{1-\rho} \cdot \Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(PD) \right]^2 \right\}$$



A partir de las expresiones para las distribuciones de defaults y conocida la relación entre defaults y pérdidas totales (que viene dada por la LGD), se obtienen de forma inmediata las expresiones para la fda y la fdp para un determinado porcentaje de pérdidas *c*:

$$F(c) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \cdot \left[\sqrt{1-\rho} \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{c}{LGD} \right) - \Phi^{-1}(PD) \right] \right)$$

$$f(c) = \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \cdot \exp\left\{ \frac{1}{2} \cdot \left[\Phi^{-1}\left(\frac{c}{LGD} \right) \right]^2 - \frac{1}{2\rho} \cdot \left[\sqrt{1-\rho} \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{c}{LGD} \right) - \Phi^{-1}(PD) \right]^2 \right\} \cdot \frac{1}{LGD}$$

Para encontrar el capital económico correspondiente a cada nivel de confianza α, se resuelve la ecuación $F(c) = \alpha$, de donde resulta:

$$CE_{\alpha,LGD}(PD) = LGD \cdot \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \cdot \left[\sqrt{\rho} \cdot \Phi^{-1}(\alpha) + \Phi^{-1}(PD) \right] \right)$$

ANEXO II

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE DEFAULTS PARA EL CASO BIFACTORIAL

Derivación de la distribución de defaults en un modelo bifactorial (I)

El valor de los activos de las empresas están "dirigidos" por dos factores correlacionados

$$\rho_F = corr(f_1, f_2)$$

$$V_1^i = \sqrt{\rho_1} \cdot f_1 + \sqrt{1-\rho_1} \cdot \xi_1^i$$

$$V_2^j = \sqrt{\rho_2} \cdot f_2 + \sqrt{1-\rho_2} \cdot \xi_2^j$$

Es posible calcular la probabilidad de default condicionada a la realización de los dos factores f_1 y f_2.

$$\begin{aligned} p_1(y_1) &= \\ &= P[V_1 < K_1 \mid f_1 = y_1] = \\ &= P\left[\sqrt{\rho_1} \cdot f_1 + \sqrt{1-\rho_1} \cdot \xi_1 < K_1 \mid f_1 = y_1\right] = \\ &= P\left[\xi_1 < \frac{K_1 - \sqrt{\rho_1} \cdot f_1}{\sqrt{1-\rho_1}} \mid f_1 = y_1\right] = \\ &= \Phi\left(\frac{K_1 - \sqrt{\rho_1} \cdot y_1}{\sqrt{1-\rho_1}}\right) = \Phi_1(\cdot) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2(y_2) &= \\ &= P[V_2 < K_2 \mid f_2 = y_2] = \\ &= P\left[\sqrt{\rho_2} \cdot f_2 + \sqrt{1-\rho_2} \cdot \xi_2 < K_2 \mid f_2 = y_2\right] = \\ &= P\left[\xi_2 < \frac{K_2 - \sqrt{\rho_2} \cdot f_2}{\sqrt{1-\rho_2}} \mid f_2 = y_2\right] = \\ &= \Phi\left(\frac{K_2 - \sqrt{\rho_2} \cdot y_2}{\sqrt{1-\rho_2}}\right) = \Phi_2(\cdot) \end{aligned}$$

Derivación de la distribución de defaults en un modelo bifactorial (II)

Condicionando en este caso a la realización de ambos factores, los defaults de la cartera son variables independientes, y de nuevo se aplica la ley de los grandes números...

$$P[X = n_1 \cdot p_1(y_1) + n_2 \cdot p_2(y_2) \mid Y_1 = y_1, Y_2 = y_2] = 1$$

De nuevo aplicando la ley de las esperanzas iteradas...

$$\begin{aligned} P[X \le x] &= E[P[X \le x \mid Y_1 = y_1, Y_2 = y_2]] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P[X \le x \mid y_1, y_2] \cdot \phi(y_1, y_2) \cdot dy_1 \cdot dy_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P[X = n_1 \cdot p_1(y_1) + n_2 \cdot p_2(y_2) \le x \mid Y = y] \cdot \phi(y_1, y_2) \cdot dy_1 \cdot dy_2 \end{aligned}$$

En este caso la integral anterior se resuelve numéricamente

$$P[X \le x] = \iint_{n_1 \cdot p_1(y_1) + n_2 \cdot p_2(y_2) \le x} \phi(y_1, y_2) \cdot dy_1 \cdot dy_2$$

Alguna documentación útil:

- www.bis.org: página web del BIS
- http://www.kmv.com: Pagina web de KMV
- http://www.moodys.com: Página web de Moodys
- http://www.stanford.edu/~duffie/index.html: Pagina web de Darrell Duffie
- http://www.people.hbs.edu/sdas/sdas.htm: Pagina web de Sanjiv Das
- http://www.stanford.edu/~kenneths: Pagina web de Kenneth Singleton
- http://www.standardandpoors.com/: Pagina web de Standard & Poors
- http://www.math.ku.dk/~dlando: Pagina web de David Lando
- http://wp.econ.bbk.ac.uk: Pagina web de William Perraudin
- http://www.algorithmics.com: Pagina web de Algorithmics
- http://www.efalken.com: Pagina web de Eric Falkenstein
- http://www.finasto.uni-bonn.de/~schonbuc: Pagina web de P. Schonbucher
- http://www.defaultrisk.com: Pagina web sobre riesgo de cdto.