

DISTRIBUCIÓN ESPACIAL DE LA ACTIVIDAD ECONÓMICA EN LA UNIÓN EUROPEA *

José Miguel Albert, Jorge Mateu y Vicente Orts **

WP-EC 2007-02

Correspondencia a: Vicente Orts: Dep. Economía e IEI, Universitat Jaume I, Campus Riu Sec, s/n, 12071 Castellón, (orts@eco.uji.es).

Editor: Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, S.A.

Primera Edición Febrero 2007

Depósito Legal: V-1000-2007

Los documentos de trabajo del Ivie ofrecen un avance de los resultados de las investigaciones económicas en curso, con objeto de generar un proceso de discusión previo a su remisión a las revistas científicas.

* Queremos agradecer los comentarios de un evaluador del IVIE y de los participantes en los Workshops de la Red de Geografía Económica, especialmente los de Jordi Pons y Diego Puga, así como los comentarios y sugerencias de Miguel Gines a algunos desarrollos formales. Así mismo queremos agradecer el apoyo financiero del IVIE, del Ministerio de Educación y Ciencia y del FEDER (proyecto SEJ2005-08764/ECON) y de la Fundació Caixa Castelló- Bancaixa y Universitat Jaume I (proyecto P1-1B2004-28). Las simulaciones de Monte Carlo necesarias para realizar este trabajo se han llevado a cabo en el Laboratori d'Economia Experimental de la Universitat Jaume I.

** J.M. Albert: Dep. Economía e IDL, Universitat Jaume I; J. Mateu: Dep. Matemáticas, Universitat Jaume I; V. Orts: Dep. Economía e IEI, Universitat Jaume I.

DISTRIBUCIÓN ESPACIAL DE LA ACTIVIDAD ECONÓMICA EN LA UNIÓN EUROPEA

José Miguel Albert, Jorge Mateu y Vicente Orts

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es analizar la distribución espacial de la actividad económica en Europa y su evolución temporal entre los años 1980 y 2002. La metodología propuesta tiene como fundamento incorporar de forma sistemática la distancia y la interdependencia espacial entre los sucesos objeto de análisis. En concreto se han utilizado dos procedimientos, el primero consiste en un índice plano de concentración espacial muy simple, el ICS (*Index of Cluster Size*), el segundo se obtiene como resultado de la parametrización y estimación de una función de distribución espacial auto-Poisson, que nos permite obtener un modelo de probabilidad, y caracterizar la estructura latente de la distribución espacial de la actividad económica en Europa. Los resultados obtenidos en ambas líneas de trabajo son básicamente los mismos, indicando que durante el periodo considerado se ha incrementado la concentración de la actividad económica para el conjunto de regiones europeas consideradas, pero con diferencias notables entre los distintos países.

Palabras clave: Distribución espacial del PIB, economía espacial, estadística espacial, localización actividad económica, auto-Poisson.

ABSTRACT

The focus of this paper is to analyze the evolution of spatial distribution of aggregate economic activity in the European Union during the period 1980-2002. The proposed methodology has as basis to incorporate, systematically, both the distance and the spatial interdependence among the analyzed events. To do this, we use two different distance-based approaches. The first approach is just a planar index, the Index of Cluster Size, but the second seeks to fit an auto-Poisson spatial distribution function that allows us to obtain a probability model and to characterize the underlying structure of the spatial distribution of the economic activity in Europe. We use data of GDP for EU regions, at the NUTS2 and NUTS3 level, for the period 1980-2002. The results obtained in both work lines are basically the same ones, indicating that during the analyzed period, the concentration of the economic activity has been increased for the group of European considered regions, but with noticeable differences among the different countries

Keywords: Auto-Poisson, economic activity localization, EU, GDP spatial distribution, spatial economics, spatial statistics.

JEL Classification: C15, C16, C21, D33.

1. Introducción

Uno de los rasgos más destacables de la distribución espacial de la actividad económica es su heterogeneidad, su sistemática tendencia al agrupamiento, a la concentración. Los procesos de integración económica y crecimiento tienen en su dimensión espacial una característica central, se trata de procesos que no son homogéneos, habiéndose convertido en una de las principales preocupaciones de políticos, geógrafos y economistas, establecer el papel que estos procesos tienen en la configuración de los patrones espaciales de la actividad económica. Así, desde el inicio del proceso de integración económica en Europa, la cuestión de su impacto regional ha sido una de las preocupaciones permanentes en el seno de los países europeos. Esta preocupación se ha agudizado en las últimas décadas fruto del importante impulso que ha recibido la integración económica y monetaria en Europa, incluyendo la entrada en vigor del Acta Única Europea, del Tratado de Maastricht, la introducción del Euro y, por último, el proceso de ampliación hacia los países del Este de Europa. Sin embargo, a pesar de la preocupación y de las políticas regionales articuladas desde la Comisión, la realidad es que el ritmo de convergencia regional en Europa entre 1950 y 1990 ha sido relativamente bajo, inferior al 2 % al año¹, y lo que resulta más preocupante, se ha reducido considerablemente desde mediados de los años 80, con tasas que se sitúan entre el 0,2 y el 0,5 % anual².

Es un hecho que en Europa subsisten en la actualidad grandes disparidades regionales en renta per cápita y en productividad por trabajador. Sin tomar en consideración las recientes ampliaciones a países del Este, cerca del 25 % de la población de la Unión Europea (UE) vive en regiones cuya renta per cápita no alcanza el 75 % de la renta media de la Unión, frente a sólo el 2 % de la población de Estados Unidos que se encontraría en similar situación³. Simultáneamente, estas discrepancias

¹ Ver, por ejemplo, Barro and Sala-i-Martin (1995).

² Martin (2001). Aunque Barro and Sala-i-Martin (1995) encuentran ritmos de convergencia para el conjunto del periodo 1950-90 del orden del 1,9 % anual, ritmo que se reduce al 1 % cuando consideran sólo la década de los 80, en una revisión reciente y actualizada de estas estimaciones, Martin (2001) encuentra tasas de convergencia de entre el 0,7 al 1 % entre 1975-86, mientras que los parámetros de convergencia para el periodo 1986-98 no resultan ser significativamente distintos de cero.

³ Ver Puga (2002).

en distribución regional de la renta, van acompañadas de una distribución de la actividad económica, sobre todo industrial, mucho más diversificada geográficamente en Europa que en Estados Unidos⁴, de modo que la segmentación de mercados introducida por la existencia de Estados independientes en Europa, ha propiciado una mayor diversificación de las economías de los diferentes países europeos frente a la mayor especialización de las regiones de tamaño equivalente en Estados Unidos, pero esto no ha conseguido homogeneizar espacialmente el nivel de actividad.

Estos datos, con ser suficientemente elocuentes de la situación, ocultan una realidad bastante más compleja. Así, cuando nos fijamos no sólo en los niveles de renta per cápita, sino en la localización espacial de las distintas regiones que los sustentan, es fácil identificar en Europa un claro patrón centro-periferia, patrón que hace más relevante en la explicación de las diferencias económicas entre regiones su localización física o el funcionamiento económico de las regiones vecinas, que la del país al que pertenecen.⁵ En palabras de Combes y Overman (2004), en la UE “podemos identificar un conjunto de regiones centrales ricas, que tienen elevados niveles de renta per capita y están localizadas cerca unas de otras, y un conjunto periférico de regiones pobres localizadas lejos del centro”.⁶ Así, la heterogeneidad regional en los niveles de renta per cápita, no parece presentar una distribución espacial aleatoria, sino que responde a un patrón que es necesario caracterizar y en el que la interdependencia espacial juega un papel relevante.

Históricamente, buena parte del análisis económico tradicional ha venido tratando el espacio como un elemento homogéneo y neutral, de modo que implícitamente se suponía que la distancia y la interacción entre las distintas localizaciones era irrelevante. Hoy nos resulta cada vez más evidente que la respuesta a muchos problemas económicos pasa por incorporar adecuadamente la dimensión espacial a nuestro análisis, y así ha sido ampliamente reconocido por la “nueva geografía económica”, incorporando a nuestro acervo de conocimientos importantes avances teóricos, que han mejorado considerablemente nuestra comprensión de las

⁴ Ver Venables (1995) o Midelfart-Knarvik, Overman, Redding and Venables (2000).

⁵ Quah (1996).

⁶ Combes and Overman (2004), p.2852.

fuerzas económicas que pueden inducir las disparidades regionales.⁷ Sin embargo, a pesar de estos avances en el plano teórico, los alcanzados en el campo empírico, aunque valiosos,⁸ han sido comparativamente menores, y esto a pesar de la existencia de una literatura específica dentro del análisis econométrico enfocada al tratamiento de datos espaciales o de una larga tradición en el uso de la estadística en el análisis regional. En síntesis, todo parece indicar que tenemos que continuar haciendo un esfuerzo en este campo, para proporcionar tanto hechos estilizados claros, como una realimentación lo más precisa posible a la teoría.

¿Dónde ha estado la dificultad? Probablemente en dos frentes diferentes, el primero, común a toda la estadística aplicada, refleja la dificultad hasta fechas recientes de hacer computacionalmente operativos los métodos propuestos, y el segundo, específico de la estadística espacial, la carencia de información estadística con la dimensión adecuada, esto es, de datos espaciales. Así por ejemplo, disponer de datos de nivel de actividad y de su distribución entre diferentes áreas (por ejemplo regiones) no siempre es suficiente para disponer del *input* informativo necesario para estudiar su patrón espacial. La información ideal necesaria sería la que nos indicase la magnitud de renta o producción existente en cada punto concreto del espacio económico objeto de análisis. Sólo de esta forma sería posible ofrecer junto a la magnitud del nivel de actividad promedio en distintas áreas su grado de dispersión o concentración. Evidentemente buena parte del problema es sencillamente que no siempre se dispone de la información suficiente y con el detalle requerido para efectuar este tipo de análisis, lo que obliga en muchas ocasiones a obviar en el análisis empírico una parte significativa de la dimensión espacial a la que nos venimos refiriendo, circunscribiendo el análisis a la comparación entre áreas predefinidas administrativamente y hacerlo sin tomar en consideración su localización espacial.

Nuestro trabajo se inscribe en la línea de ir superando alguna de las dificultades empíricas mencionadas, en concreto, vamos a parametrizar y estimar una función de distribución espacial auto-Poisson para analizar la evolución temporal del patrón espacial de la actividad económica en la Unión Europea (UE) entre 1980 y 2002, de esta

⁷ Una revisión de esa literatura se puede encontrar en Octaviano y Puga (1997), Fujita, Krugman and Venables (1999) y Neary (2001).

⁸ Una revisión interesante de la literatura empírica sobre geografía económica puede verse en Overman, Redding and Venables (2003) y, específicamente referida a la distribución espacial de la actividad económica en la UE, en Combes and Overmann (2003).

forma nuestro análisis incorporará de forma sistemática la distancia y la interdependencia espacial entre los sucesos objeto de análisis. Al ajustar los parámetros de un modelo auto-Poisson obtenemos la estructura que caracteriza la distribución espacial de la actividad económica en el área objeto de estudio, estructura que consiste en una función de probabilidad condicionada. En concreto, a partir de nuestras estimaciones es posible calcular la probabilidad de encontrar actividad económica en una determinada zona condicionando dicha probabilidad a la actividad económica que existe en un entorno de dicha zona. Si con el transcurso del tiempo aumenta la probabilidad de encontrar actividad económica en las zonas con mayor actividad económica inicial, y disminuye dicha probabilidad en las zonas con menor actividad económica inicial, concluiremos que ha aumentado la concentración espacial de la actividad económica. Obviamente la relación contraria también es válida. Adicionalmente, al condicionar los resultados a la actividad económica existente en un entorno determinado, es posible estudiar cómo se ven afectados los resultados al variar la distancia considerada. Además, la estimación de la función auto-Poisson nos proporciona un indicador directo del patrón de concentración de la actividad en el área objeto de estudio, indicador que, como posteriormente veremos, en determinadas condiciones (a medida que nos acerquemos al límite teórico) va incrementando el nivel de precisión con que mide la concentración.

Por último, el cómputo de un índice plano de concentración espacial, el ICS, también ayudará a caracterizar los cambios observados en la distribución espacial de la actividad económica en la UE durante el período señalado.

Los resultados obtenidos indican la existencia de un incremento de la aglomeración de la actividad económica en Europa, resultado que se reproduce para la mayoría de países objeto de estudio cuando se consideran individualmente, aunque con notables excepciones.

Sabemos que el patrón espacial de la actividad económica en un determinado territorio está determinado por numerosos procesos que actúan de manera simultánea y que la estadística espacial, por si sola, no permite determinar el proceso o procesos económicos que están originando una determinada distribución o dinámica espacial, sin embargo, puede proporcionar información valiosa relativa a regularidades que nos ayuden a identificar los posibles factores causales y puede contribuir a generar hipótesis sobre los procesos que han sido importantes en su génesis. De esta forma esperamos que el análisis espacial de la actividad económica que vamos a desarrollar permita arrojar

algo de luz y contribuir al debate sobre la situación actual y perspectivas futuras de la convergencia en Europa.

El resto del artículo se ha organizado de la siguiente forma. En el apartado 2 se expone la metodología básica que hemos seguido, mientras que en el apartado 3 se exponen los principales resultados de nuestro análisis y, por último, en el apartado 4 se efectúan algunas consideraciones finales.

2. Algunos métodos estadísticos para el análisis de datos espaciales

Junto a los desarrollos de un amplio conjunto de trabajos englobados en el término “econometría espacial” acuñado por Paelinck en los años setenta, para referirse al conjunto de métodos que intentaban tratar explícitamente el espacio en modelos multirregionales, recientemente está emergiendo una nueva línea de trabajo, más arraigada en el ámbito de la estadística espacial, caracterizada por el uso de los procesos de puntos espaciales. Una buena síntesis y ejemplo del primer grupo de trabajos lo podemos encontrar en Combes y Overman (2004)⁹, mientras que Marcon y Puech (2003) y Qua y Simpson (2003) podrían constituir ejemplos recientes del segundo grupo. En este papel nos proponemos realizar una aplicación concreta de la metodología asociada a la modelización de patrones de puntos espaciales, persiguiendo de este modo, como señalan Qua y Simpson (2003), ir más allá de un simple índice de concentración, y obtener una caracterización del proceso generador de la distribución espacial observada de la actividad económica en la UE.

La singularidad de los datos espaciales, desde una perspectiva estadística, es la necesaria ubicación en un espacio acotado. Así un patrón de puntos espacial es un conjunto de localizaciones definidas por sus coordenadas planas (g, h) , que puede obtenerse como realización de un modelo estocástico que determina la localización de sucesos en un espacio que nosotros supondremos acotado.¹⁰ En la literatura sobre patrones de puntos espaciales se asocian las localizaciones de los puntos a sucesos en la región de observación. La primera clasificación para distinguir entre patrones de puntos

⁹ Como ejemplo también puede verse Moreno y Vayá (2002) y Trivez, Mur, Angulo, Ben Kaabía y Catalán (2005).

¹⁰ Cox and Isham (1980).

consiste en determinar si la distribución de los sucesos que dichos puntos representan siguen un patrón aleatorio, un patrón regular o un patrón de agrupamiento. Para realizar esta clasificación, la estrategia habitual ha consistido en establecer las condiciones que debe cumplir un patrón de puntos para ser calificado de aleatorio o, más estrictamente, para que podamos considerar que presenta aleatoriedad espacial completa (*complete spatial randomness*, CSR), y por referencia a él, definir los otros dos. En concreto, diremos que un patrón de puntos espacial presenta CSR si: 1) cada uno de los sucesos tiene la misma probabilidad de ocurrir en cualquier punto de la región de observación; y 2) los sucesos están localizados en el espacio independientemente uno del otro.

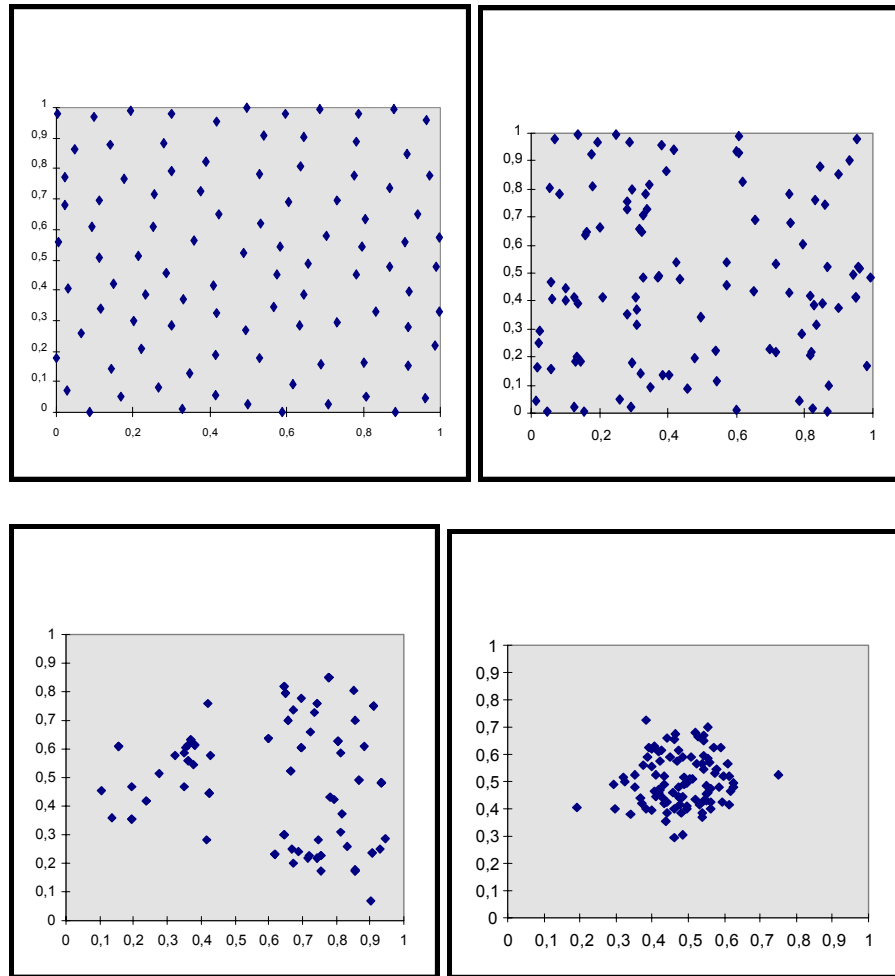
Las condiciones de CSR para los patrones de puntos espaciales, se identifican con las de un proceso de Poisson en un espacio de dos dimensiones (Diggle, 1983), lo que permite utilizar una importante propiedad de dicho proceso en la caracterización de los patrones de puntos espaciales; a saber, que el parámetro μ , que caracteriza una distribución de Poisson, es igual a la media y a la varianza de la misma.

Con el objetivo de ilustrar las distintas posibilidades, en la figura 1 se muestran gráficamente distintos patrones de puntos espaciales (con cien puntos cada uno) y que exhiben un comportamiento regular (arriba-izquierda), aleatorio (arriba-derecha) o diferentes niveles de agrupamiento o concentración (abajo). La razón fundamental de la diferencia entre esos patrones se basa en la distinta distribución espacial (localización) de los puntos en cada uno de ellos.

Para conseguir información sobre las características del patrón de puntos objeto de análisis, es habitual utilizar técnicas de recuento de puntos (sucesos) localizados en diferentes subconjuntos de la región de estudio. Las técnicas de recuento se basan en la existencia de algún tipo de relación entre los sucesos contabilizados en esos diferentes subconjuntos de la región de estudio. Tradicionalmente, los subconjuntos considerados son rectangulares (de ahí que reciban el nombre de cuadrados), no obstante es posible cualquier forma. Los cuadrados pueden situarse diseminados aleatoriamente en la región objeto de estudio (tal y como se ilustra a la izquierda en la fig. 2), o bien uno junto a otro, de forma contigua (cuadrados contiguos, a la derecha en fig. 2), ocupando en este caso todo el espacio considerado.

Cuando se utilice la técnica de los cuadrados contiguos, se denominará “orden de la cuadrícula” (n) al número total de subconjuntos en que queda dividido el plano acotado que constituirá el área de estudio, siendo $n = m_f \times m_c$, donde m_f es el número de

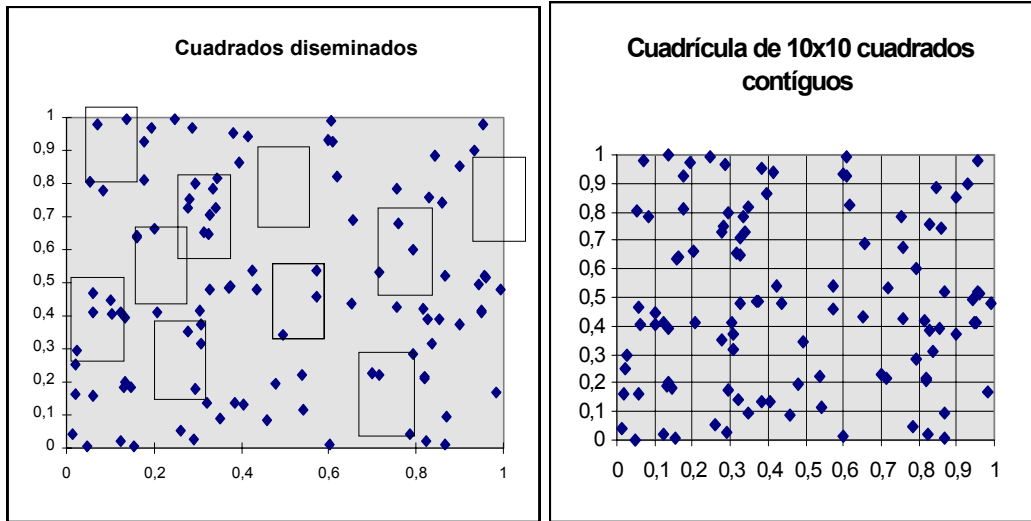
FIGURA 1. Distintos patrones de puntos espaciales.



filas o tramos en que se divide el eje de ordenadas, y m_c es el número de columnas o tramos en que se divide el eje de abscisas. Obviamente, si $m_f = m_c = m$ entonces $n = m^2$.

La cantidad de sucesos que existe en los diferentes subconjuntos es la base del análisis estadístico que posteriormente se realizará para diferenciar y caracterizar los distintos patrones de puntos. Para obtener el número de sucesos que ocurren dentro de cada subconjunto realizamos recuentos de puntos, los cuales pueden ser de orden 0, de orden 1, de orden 2, etc. Si denominamos t_i^k al número de puntos obtenido cuando efectuamos el recuento de puntos de orden k en la celda i con coordenadas (g, h) tendremos:

FIGURA 2. Cuadrados diseminados aleatoriamente y cuadrados contiguos



Recuento de orden cero sobre la celda i con coordenadas (g, h)

$$t_i^0 = x_{g,h} = \text{puntos dentro de la celda } i \text{ con coordenadas } (g, h)$$

En los siguientes recuentos no se incluyen los puntos dentro de la celda i .

Un **recuento de primer orden**, como se ilustra en figura 3a, significa que si estamos en la celda $i=(g, h)$, entonces

$$t_i^1 = x_{g-1,h} + x_{g+1,h} + x_{g,h-1} + x_{g,h+1}$$

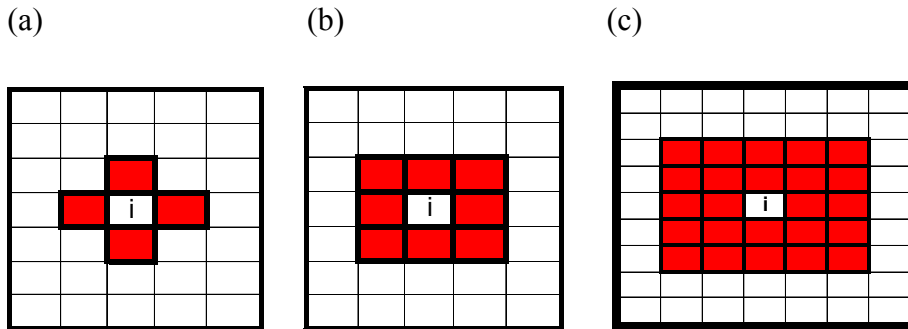
y en un **recuento de segundo orden** (figura 3b)

$$t_i^2 = t_i^1 + x_{g-1,h-1} + x_{g+1,h+1} + x_{g-1,h+1} + x_{g+1,h-1}$$

Continuando así se pueden obtener esquemas de recuento del orden que interese (en la figura 3c, el área sombreada indica las celdas que hay que considerar para obtener **recuentos de tercer orden** sobre la celda i).

El sistema de recuentos a partir de la técnica de los cuadrados contiguos que terminamos de ver, permite utilizar la información relativa a la localización de los distintos sucesos en el plano y combinar la información de diferentes cuadrados (celdas) para establecer el área de influencia que se desea tener en cuenta en el análisis. Este

FIGURA 3. Recuentos de distinto orden



método de recuento ha sido utilizado por diferentes técnicas de análisis espacial con el objeto de caracterizar los patrones de puntos observados y es el que se sigue en este trabajo.

2.1. El índice del tamaño del agrupamiento (ICS)

Un indicador directo que permite una primera caracterización de un determinado conjunto de sucesos en un espacio acotado es el ICS (*index of cluster size*),¹¹ que se define como,

$$ICS = (S^2 / \bar{X}) - 1 \quad (1)$$

siendo S^2 y \bar{X} la varianza y la media muestral obtenidas después de superponer una cuadrícula de cuadrados contiguos sobre un patrón de puntos y obtener los recuentos de orden cero. El ICS es un indicador del grado de interdependencia y agrupamiento que presenta el conjunto de sucesos en el espacio objeto de análisis y nos permite clasificar los distintos patrones de puntos. Dado que los recuentos de observaciones generadas por un proceso aleatorio, cuando los subconjuntos en que se divide la región objeto de estudio son cuadrados de igual tamaño, siguen una distribución de Poisson, cuya propiedad más relevante a nuestros efectos es que la media y la varianza son iguales, el ICS tomará en este caso valor 0. Lógicamente, si el modelo es más regular que uno de Poisson, el tamaño de los recuentos de los cuadrados serán más uniformes, y por lo

¹¹ El indicador fue sugerido por David y Moore (1954), aunque la notación ICS se debe a Douglas (1975).

tanto, tendrán una varianza relativamente pequeña respecto a la media y el ICS será negativo. Por otra parte, si hay agrupamiento, esto es, si existen sucesos íntimamente asociados con un suceso elegido aleatoriamente, algunos cuadrados tendrán recuentos grandes, mientras que en otros no existirán sucesos, por lo que la varianza de los recuentos será relativamente grande respecto a la media y el ICS será positivo. Por lo tanto, la relación entre la media y la varianza muestral, que sintetiza cuantitativamente el ICS, nos proporciona un contraste natural de la distribución de Poisson y nos permite clasificar los patrones en

$$\text{patrones aleatorios:} \quad \bar{X} = S^2 \quad \text{e} \quad ICS = 0$$

$$\text{patrones regulares:} \quad \bar{X} > S^2 \quad \text{e} \quad ICS < 0$$

$$\text{patrones con agrupación:} \quad \bar{X} < S^2 \quad \text{e} \quad ICS > 0$$

Este índice tiene en su sencillez la principal ventaja, sin embargo, y como otros índices planos, es sensible al tamaño del cuadrado utilizado en los recuentos. En particular, al calcular el ICS sobre la base de los cuadrados contiguos se obtiene una magnitud que es muy sensible al nivel de agrupamiento de los puntos del patrón analizado, pero también al número de puntos, aumentando la magnitud de dicho índice tanto con el nivel de agrupamiento como con el número total de puntos del patrón.¹²

2.2. La función de distribución espacial auto-Poisson

El objetivo de esta sección es ir más allá de los habituales estadísticos descriptivos y proponer una metodología para estimar una función de distribución que nos permita caracterizar el proceso generador de la estructura espacial objeto de análisis. Nos proponemos pues el ajuste de modelos estocásticos para detectar la dimensión y estructura espacial subyacente a un patrón de puntos. Dicha estructura espacial nos medirá y caracterizará la fuerza de las interdependencias entre las diferentes localizaciones. Una de las funciones candidata para cubrir dicho objetivo ha sido tradicionalmente la función de distribución de Poisson. Sin embargo, la distribución de Poisson clásica se traduce en este contexto en la de independencia espacial, es decir, representaría colecciones de puntos localizados al azar e

¹²Ver Apéndice A. Un estudio más detallado de este comportamiento puede verse en Albert et al. (2000).

independientemente unos de otros dentro de una cierta región de interés. Dado que el objetivo es detectar aquellas situaciones en las que existe dependencia espacial, proponemos utilizar la función de distribución auto-Poisson (Besag, 1974) como modelo probabilístico paramétrico que la recoja.

En este trabajo nuestra propuesta queda restringida a los procesos de puntos de interacción entre pares (Ripley, 1977). En este tipo de procesos se define una estructura de vecindad y la interacción se produce sólo entre vecinos. Por ejemplo, diremos que dos puntos u y v del proceso de puntos x son vecinos, y escribiremos $u \sim v$, si la distancia entre estos puntos es menor que d , es decir $\|u - v\| < d$.

En concreto, la función auto-Poisson nos proporciona la probabilidad de obtener x_i puntos en un determinado subconjunto de un patrón de puntos, condicionada al número de puntos t_i que se encuentren alrededor de dicho subconjunto:

$$P(x_i | t_i) = \frac{e^{-\mu_i(\cdot)} [\mu_i(\cdot)]^{x_i}}{x_i!}, \quad x_i = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

donde $\mu_i(\cdot) = A\lambda\rho^{t_i}$, siendo λ y ρ los parámetros que caracterizan la función auto-Poisson, estando λ asociada con la intensidad del patrón y ρ con el agrupamiento, A es el área de cada una de las celdas individuales de la cuadrícula de cuadrados contiguos en que se divide el espacio de referencia, y t_i recoge el recuento total de puntos de todas las celdas vecinas a la celda i que están completamente dentro del rango fijado d . Los recuentos pueden ser de orden 0, de orden 1, de orden 2, etc. Para $\lambda > 0$ y $0 \leq \rho \leq 1$, esto produce una única y válida distribución de probabilidad sobre las celdas (Besag, 1974). Se sigue que $\rho > 1$ es indicador de un proceso de agrupamiento aunque define una función de probabilidad no integrable.

Para la estimación de λ y ρ seguimos un procedimiento bastante sencillo, superponemos una cuadrícula fina, con todas las celdas de igual tamaño, sobre el patrón de puntos, obtenemos los valores del correspondiente recuento de celdas y ajustamos el esquema auto-Poisson para distintos tamaños de la cuadrícula. En principio, podríamos utilizar el principio de máxima verosimilitud en la estimación de los parámetros, sin embargo, la distribución conjunta implica una constante normalizadora extremadamente incómoda, lo cual excluye la utilización del método de máxima verosimilitud. Como alternativa, podemos usar en la estimación, el método de la pseudo-verosimilitud. Con carácter general, dada la especificación de probabilidad condicionada que se usa, el

método asigna a los parámetros aquellos valores que maximizan la función de pseudo-verosimilitud (PL)

$$PL = \prod_i P(x_i | t_i)$$

Y tomando logaritmos, se obtiene la expresión a partir de cuya maximización¹³ se obtienen los parámetros λ y ρ :

$$\ln(PL) = -\lambda A \sum_{i=1}^n \rho^{t_i} + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \ln(A) + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \ln \lambda + \left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \ln \rho - \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i!\right) \quad (3)$$

Por último, es interesante tener en cuenta que, tal y como demostró Besag (1977), al ajustar una función auto-Poisson a un patrón de puntos siguiendo el método anterior de superponer una cuadrícula fina, e ir reduciendo el tamaño de las celdas hasta que en cada una de ellas solo encontráramos uno o ningún punto (situación que se define como “límite teórico”), el proceso auto-Poisson convergía a un proceso de Strauss¹⁴

$$f(x) \propto \lambda^{p(x)} \rho^{s(x)}$$

La expresión anterior muestra un proceso de Strauss, donde el parámetro λ nos informa de la intensidad del proceso, y su exponente está relacionado con el número total de puntos del proceso, mientras que el parámetro ρ es un indicador del grado de agrupamiento de los puntos, y su exponente es una función de interacción relacionada con el número de puntos del proceso que podemos encontrar en un círculo de radio determinado d , dentro de dicho proceso. Por consiguiente, si ajustamos una función auto-Poisson a un patrón de puntos y vamos reduciendo el tamaño de la celda básica (aumentando el tamaño de la cuadrícula), a medida que nos acerquemos al límite teórico, los valores estimados de λ y ρ nos informarán con cada vez con mayor precisión sobre la intensidad y la agrupación del patrón de puntos.

¹³ En el apéndice B se presenta una exposición más detallada del procedimiento de estimación de los parámetros de la función auto-Poisson.

¹⁴ Ver apéndice C y Strauss (1975).

3. La distribución espacial de la actividad económica en la Unión Europea

Para analizar las características de la distribución espacial de la actividad económica en la Unión Europea usaremos datos de PIB de las regiones de un conjunto de países europeos. Los países incluidos en el análisis han estado determinados por la disponibilidad de información con suficiente detalle para todo el período. En concreto, los países considerados son: la antigua Alemania Federal, Francia, Italia, Gran Bretaña, Bélgica, Holanda, Luxemburgo, Irlanda, Portugal y España. El PIB está medido en millones de unidades de paridad de poder de compra estándar correspondiente a los años 1980 y 2002, obtenidos de Datashop-Eurostat, con un nivel de desagregación regional NUT3 para España y Francia, y NUT2 para el resto de países¹⁵ exceptuando Irlanda, con un solo dato, y Portugal con sólo tres subregiones. El detalle de las regiones consideradas se presenta en la figura 4a.

La localización espacial de las distintas regiones se ha establecido tomando como referencia lo que hemos denominado “coordenadas centrales”. Las coordenadas centrales de cada región se corresponden con las coordenadas geográficas del punto central aproximado del área en el que se localiza la mayor parte de la población de la región, coincida este o no con su capital administrativa. A partir de estas coordenadas centrales la localización en el plano se ha conseguido transformando en coordenadas UTM las coordenadas geográficas (longitud y latitud) correspondientes obtenidas del atlas universal electrónico Encarta 98 (Microsoft) por medio del procedimiento propuesto en Morton (2003). En la figura 4b se puede observar la localización (medida por las coordenadas centrales) de todas las regiones consideradas.

3.1. Localización espacial intra-regional del PIB de las regiones de la UE

Una vez determinada la localización de cada región y conocido el nivel de actividad correspondiente, nos queda por resolver un problema habitual a la hora de representar magnitudes y fenómenos económicos en el espacio, en este caso, establecer una correspondencia entre el PIB de cada región y el número de puntos y coordenadas espaciales que lo representa dentro de dicha región. Resulta sencillo traducir la

¹⁵ El uso de NUT2 y NUT3 simultáneamente responde al intento de partir de unidades territoriales más homogéneas en términos de superficie (en España las NUT3 se corresponden con las provincias).

FIGURA 4a. Detalle de las regiones consideradas de la UE

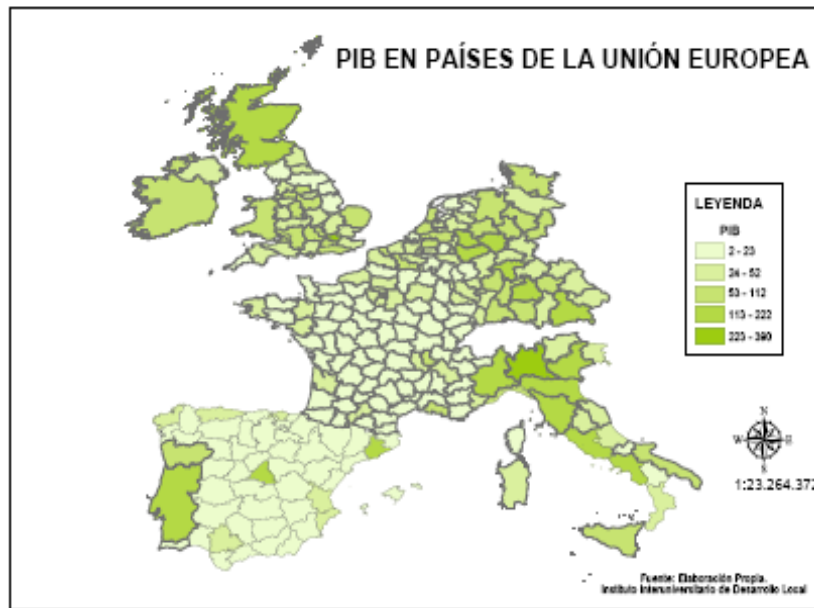
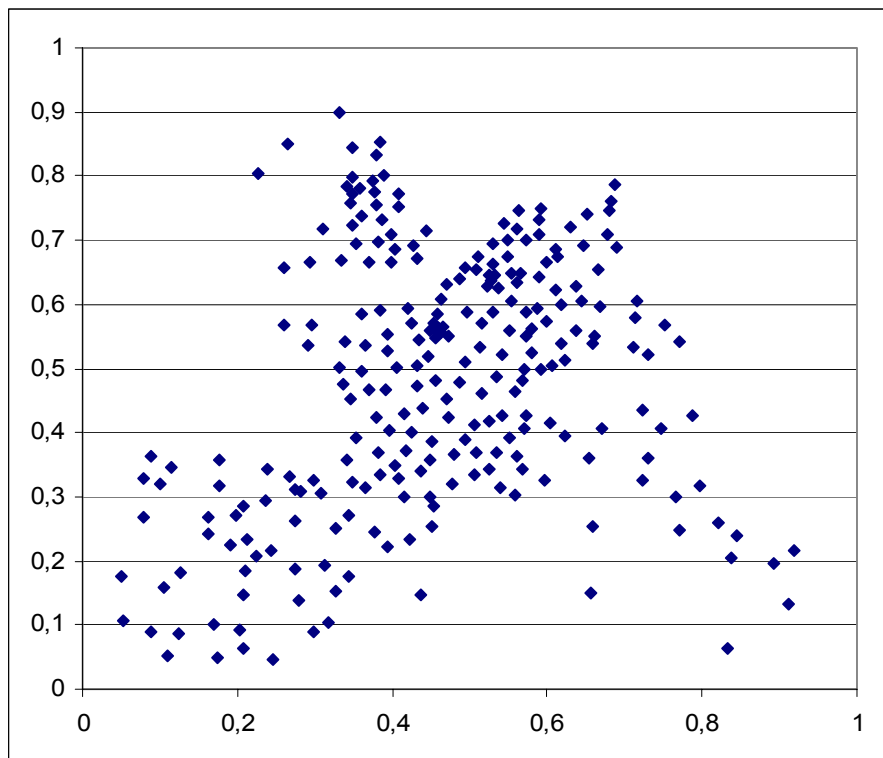


FIGURA 4b. Localización de las regiones consideradas (coordenadas centrales)



magnitud del PIB de cada región en un conjunto (número) de puntos que lo represente, la dificultad estriba en que no suele estar disponible la información necesaria para ubicar cada uno de estos puntos dentro de la unidad territorial en cuestión, lo que obliga a efectuar algunas hipótesis que, cuanto menos, se deben explicitar.

En concreto, en este trabajo construiremos los patrones de puntos, dentro de cada región, por medio de un método que hemos denominado "método normal". Este método está relacionado con un supuesto familiar en la literatura de economía urbana, que la función de densidad de una población presenta una pendiente exponencial negativa, conocido como el gradiente de Muth-Mills. Según este supuesto, donde más densidad de habitantes existe en una ciudad es en su distrito comercial central, y a partir de este centro la densidad va disminuyendo en forma exponencial en todas direcciones. Para aproximar esta forma de representar la localización se ha generado, para cada región, una nube de p puntos que presente un patrón de distribución normal alrededor de sus coordenadas centrales, con la misma varianza tanto sobre abscisas como sobre ordenadas (ver ilustración en figura 5).¹⁶

Mediante esta técnica se ha construido en cada región una nube de puntos que sigue una distribución normal, con una desviación típica (la misma para cada eje) proporcional a la superficie de dicha región, con un conjunto de valores comprendidos entre la región de París con 2,9 kilómetros de desviación típica, y la de Escocia con 78,86 kilómetros. El número de puntos alrededor de cada coordenada central es proporcional al PIB total de la correspondiente unidad territorial. En la figura 6 se representa una nube de puntos que reflejaría la distribución espacial del PIB en la UE en 1980, cada punto representa un PIB de 215,5 millones de unidades de paridad de poder de compra estándar en la UE.

Para minimizar el efecto sobre nuestros cálculos agregados del método de construcción de las nubes de puntos en cada región considerada, hemos procedido a construir en cada caso 100 nubes de puntos, para cada una de ellas hemos estimado los parámetros que ajustan la función de distribución auto-Poisson y hemos calculado el ICS, de forma que los resultados que se presentaran en las tablas siguientes son los valores medios estimados o calculados de cada indicador, y van acompañados de la

¹⁶ Para ejecutar ese proceso generador hemos utilizado una aplicación del software SPPA. Este software se diseñó específicamente para hacer computacionalmente operativo el método propuesto por Besag, y su funcionamiento ha sido contrastado mediante simulaciones de Montecarlo (Albert et al., 2000 y 2002).

FIGURA 5. Ejemplo de nube de 1000 puntos con coordenadas centrales 0,5, 0,5 y varianza 0,02 sobre ambos ejes

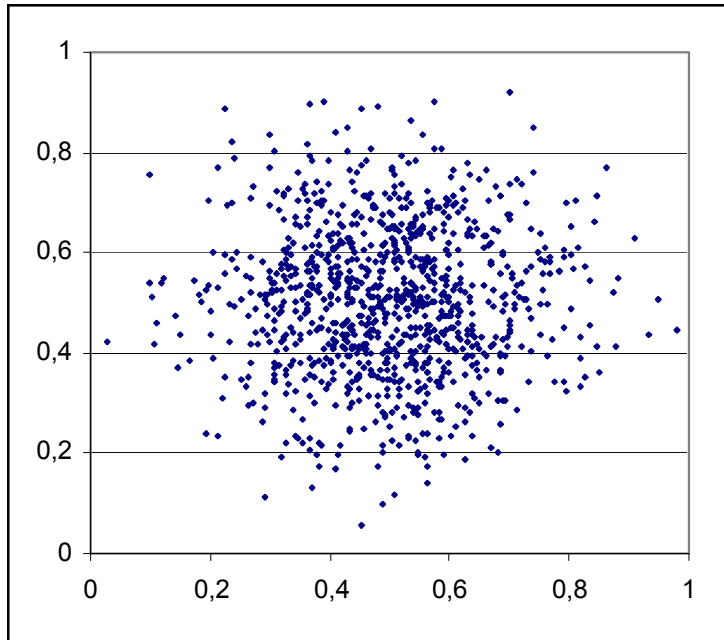
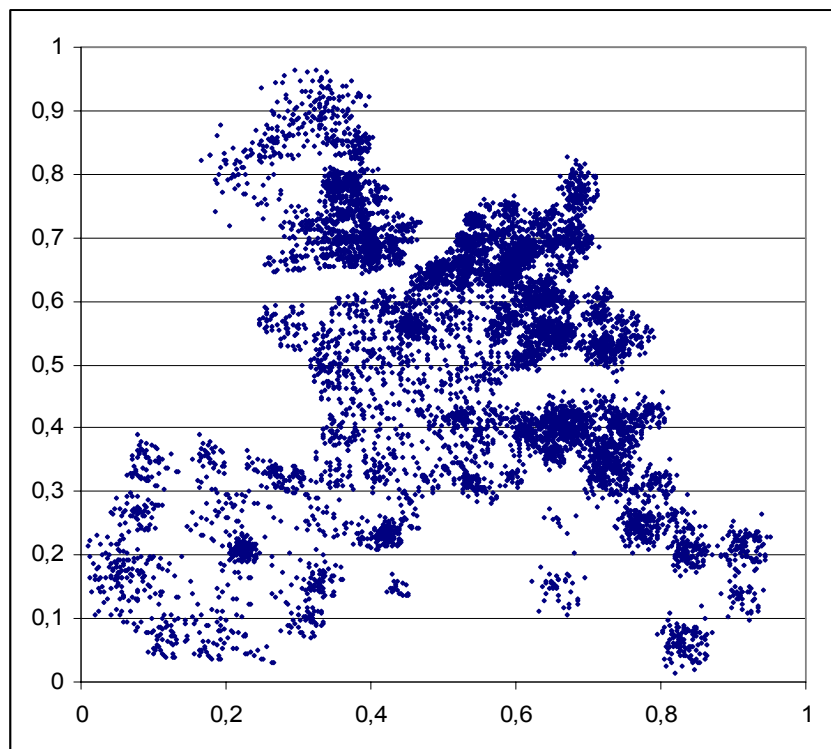


FIGURA 6. Ejemplo de la distribución espacial del PIB en 1980



correspondiente desviación típica (σ). Además, las nubes de puntos de los distintos años han sido normalizadas reescalando la relación entre número de puntos y el PIB de cada región, con el objetivo de mantener constante el número total de puntos del conjunto de la UE, para eliminar la dependencia de estos indicadores con respecto al número total de puntos y hacerlos comparables. Los resultados de la estimación de los parámetros de cualquier función de distribución espacial dependen de la superficie que se tome como unidad básica de análisis, la cual en nuestro caso depende de la combinación de dos factores: el tamaño de la cuadrícula y el orden de recuento utilizados.

Evidentemente la relevancia de los resultados obtenidos a partir del método anterior depende de su sensibilidad a los supuestos de construcción de las nubes de puntos en cada región. La objeción más clara a la metodología propuesta radica en que las nubes construidas en cada región ya comportan cierto grado de agrupamiento que podría afectar a los resultados. Aunque probablemente la realidad más que justifica este método de localización espacial de la actividad económica, hemos querido contrastar la robustez de nuestros resultados planteando un método de construcción de las nubes de puntos de cada región radicalmente opuesto en sus propiedades al método anterior (que sigue una normal). El método alternativo de distribución de puntos dentro de cada región consiste en distribuir el número total de puntos correspondiente a cada región de una forma regular y determinista, de manera que ocupen aproximadamente la superficie total de dicha región; en concreto, para cada región tendremos un primer punto localizado en su coordenada central (a, b), alrededor de esta coordenada central se van distribuyendo los puntos de forma circular utilizando el siguiente algoritmo

$$(a + r \cos \alpha, b + r \operatorname{sen} \alpha)$$

siendo r la distancia Euclídea entre cada par de puntos, mientras que α depende del número de puntos que queremos situar en las circunferencias de radio $r, 2r, 3r$, etc., alrededor de la coordenada central. En la primera circunferencia, con radio r , situamos hasta 6 puntos, y cada una de las circunferencias siguientes tienen hasta seis puntos más que la inmediata anterior, así vamos construyendo la nube de puntos hasta alcanzar el número de puntos que le corresponden a la región. Hemos calculado las r para obtener una distribución regular y circular de puntos cuya superficie sea idéntica a la de cada unidad territorial considerada. En la figura 7 se puede ver un ejemplo de una nube con 547 puntos construida siguiendo este método regular determinista, sobre una coordenada central (0.5, 0.5) y con una distancia de $r = 0.02$ entre pares de puntos, mientras que la figura 8 muestra la distribución espacial del PIB de las regiones de la UE en 1980 utilizando el método regular determinista para su construcción.

3.2. *Análisis de la estructura espacial de la actividad económica en la UE*

Como ya hemos dicho, una primera aproximación de las características de la distribución espacial de la actividad económica en la UE se puede obtener calculando el ICS. Con este objetivo, a las nubes de puntos simuladas para 1980 y 2002, les hemos aplicado diferentes cuadrículas. Todas las cuadrículas utilizadas implican igual número de filas que de columnas, de modo que cuando se escribe “cuadrícula m ” el número total de celdas básicas es $n=m^2$. Dado que los valores del ICS dependen del tamaño de la cuadrícula utilizada, se han utilizado dos tamaños de cuadrícula, uno relativamente pequeño, con $m=15$, y otro de un tamaño mayor, con $m=100$. Este último caso se corresponde además con el tamaño de cuadrícula considerado más aconsejable, con un número total de celdas que no supere el número de puntos de la nube.¹⁷ Como forma de aproximar esta restricción, se ha tomado m como la parte entera de \sqrt{p} , siendo p el número total de puntos de la nube. Los resultados de calcular el ICS se muestran en la tabla 1, en donde la primera columna informa del número total de puntos de las nubes y del año a que corresponden los datos de la UE; la segunda columna muestra el valor medio calculado del ICS con una cuadrícula de $m=15$ mientras que la tercera columna muestra la correspondiente desviación típica; la cuarta columna presenta el p-valor asociado al contraste sobre diferencias de medias del ICS entre los dos periodos considerados; las columnas 5, 6 y 7 ofrecen la misma información que la 2, 3 y 4 pero para una cuadrícula de $m=100$.

Como se desprende de la observación de esta tabla, el cálculo del ICS nos informa de que la pauta de la distribución espacial de la actividad económica en la UE es el agrupamiento, la heterogeneidad, así como que se ha producido un incremento significativo de la concentración espacial de la actividad económica durante el periodo considerado. Sin embargo, el ICS, como cualquier índice plano, es muy sensible a la superficie de referencia y, lo que probablemente en nuestro caso es más importante, no tiene en cuenta la interacción entre sucesos del conjunto de observación, ni la hace depender de su localización relativa (distancia). En la medida que el agrupamiento del nivel de actividad responda a pautas endógenas, sensibles al entorno en el que se

¹⁷ Ver Albert et al. (2000).

FIGURA 7. Ejemplo del método regular determinista de localización de puntos dentro de cada región: coord. central (0.5, 0.5), $r=0.02$, con 547 puntos

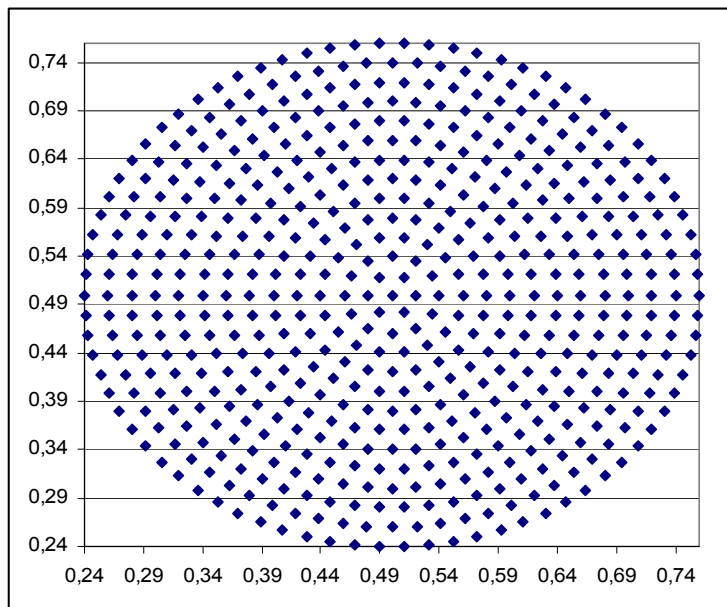


FIGURA 8. Distribución del PIB en las regiones de la UE en 1980, método regular determinista

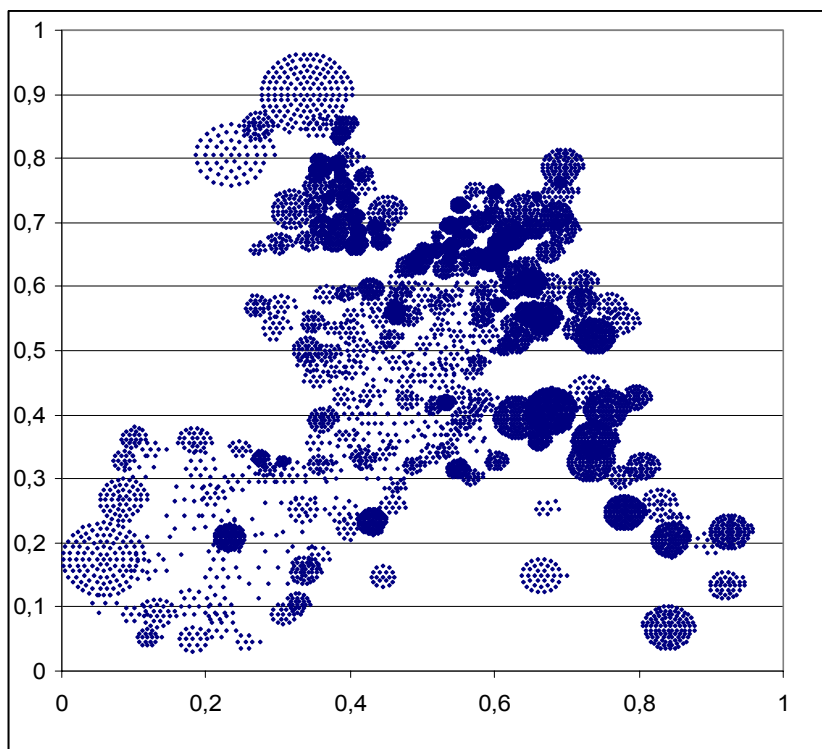


TABLA 1. Cálculo ICS (*grids* $m=15$ y $m=100$)

10000 p	ICS15	σ	p-valor	ICS100	σ	p-valor
UE(1980)	176,0564	1,193902		15,93793	0,326075	
UE(2002)	177,0845	1,26766	0	17,03784	0,40274	0

producen, a la distancia entre unos núcleos de actividad y otros, nuestro objetivo debe ser tenerlas en cuenta y tratar de calibrar su intensidad. Un modelo estadístico útil en este contexto, debe aspirar no sólo a describir el nivel de actividad promedio en un territorio y su grado de dispersión, sino a captar rasgos relevantes del proceso generador de la distribución espacial observada. Este es el objetivo que perseguimos con la estimación de la función de distribución espacial auto-Poisson.

Para efectuar este análisis, hemos partido de 5 cuadrículas diferentes, y para cada cuadrícula hemos utilizado diversos órdenes de recuento (superficies). El objetivo ha sido doble. Por un lado ir aproximándonos al límite teórico y por otro tratar de establecer un entorno (superficie) de interacción óptima. En concreto, hemos utilizado las siguientes cuadrículas y órdenes de recuento:

- Cuadrícula con $m=160$, con órdenes de recuento entre 1 (976.6 km^2) y 20 (371093.8 km^2).
- Cuadrícula con $m=241$, con órdenes de recuento entre 1 (430.4 km^2) y 20 (163564.7 km^2).
- Cuadrícula con $m=482$, con órdenes de recuento entre 1 (107.6 km^2) y 35 (128054.0 km^2).
- Cuadrícula con $m=1206$, con órdenes de recuento entre 1 (17.2 km^2) y 50 (42112.5 km^2).
- Cuadrícula con $m=1410$, con órdenes de recuento entre 1 (12.6 km^2) y 55 (37347.2 km^2).

Los principales resultados de las estimaciones de los parámetros de la función auto-Poisson se presentan en las tablas 1 a 5 del Apéndice E. La diferencia entre cada una de ellas es el tamaño de la cuadrícula utilizada ($m= 160, 241, 482, 1206$ y 1410 respectivamente). La primera columna de las tablas muestra los órdenes de recuento considerados en cada estimación. La segunda columna presenta áreas en km^2 ; la primera cifra debajo del encabezamiento indica la superficie de la celda básica asociada al

tamaño de cuadrícula utilizado, mientras que las cifras que completan la columna informan de la superficie de interacción tomada en consideración en cada caso y que se corresponde con el orden de recuento correspondiente. Las magnitudes de las columnas tercera y cuarta son las medias de los valores máximos alcanzados por el LnV (logaritmo neperiano de la verosimilitud) en las estimaciones y del parámetro ρ ¹⁸, obtenidos para el conjunto de países de la UE considerados, a partir de las 100 nubes de puntos construidas para cada región con los datos del PIB regionales en 1980. La quinta columna (encabezada por σ) muestra la desviación típica¹⁹ de las estimaciones de ρ . Las columnas 6, 7 y 8 son equivalentes a la 3, 4 y 5, pero obtenidas a partir de datos del PIB regional del año 2002.

El primer resultado que queremos destacar es que, en todas las estimaciones, se detecta una clara concentración de la actividad económica en la UE. Dicha concentración espacial es independiente del tamaño de celda y, sobre todo, del orden de recuento considerado, de modo que esta característica es robusta a la distancia de interacción considerada. En todas las estimaciones el parámetro ρ es mayor que la unidad, siendo rechazada en todos los casos la hipótesis nula de $\rho=1$ por medio de tres contrastes: la razón de verosimilitudes, el método de los multiplicadores de Lagrange y el método de Wald.

En segundo lugar, aunque los valores máximos que alcanza la función de verosimilitud son sensibles al número de celdas considerado (tamaño de la cuadrícula), disminuyendo a medida que incrementamos el número de celdas en que dividimos la superficie total objeto de estudio, los máximos de las correspondientes funciones de verosimilitud alcanzan sistemáticamente su valor más elevado en el entorno de una superficie determinada (de un orden de recuento que difiere con el tamaño de la cuadrícula m , pero que resulta aproximadamente equivalente en términos de distancia o superficie), lo que hace pensar que la magnitud de esta distancia para la que se alcanzan los mayores valores del logaritmo de la función de verosimilitud depende más de la distribución espacial de la nube de puntos objeto de análisis que del tamaño de

¹⁸ Por sencillez, en estas tablas hemos optado por presentar sólo el parámetro ρ , ya que es el que aproxima el grado de agrupamiento.

¹⁹ Hemos comprobado que estas desviaciones típicas son muy parecidas a las que se obtienen al ajustar ρ por el método de máxima verosimilitud en el proceso de simulaciones. En todos los casos, para los primeros órdenes de recuento la desviación típica obtenida en el ajuste es menor que la de las muestras del proceso de Monte Carlo, llega un orden de recuento en que prácticamente son iguales, y a partir de aquí empieza a ser cada vez mayor la desviación típica del ajuste máximo verosímil.

cuadrícula utilizado. Aunque este extremo se puede comprobar en las tablas 1 a 5 del Apéndice E, en la figura 9 se representa gráficamente, para cada tamaño de cuadrícula, la magnitud del máximo de la función de verosimilitud obtenida en función de la superficie de recuento; en todos los casos, el mayor valor se obtiene en el intervalo comprendido entre 24000 km² y 29500 km², lo que equivale a radios de interacción que oscilarían en promedio entre 150 y 170 Km. para el conjunto de los países de la UE considerados.²⁰

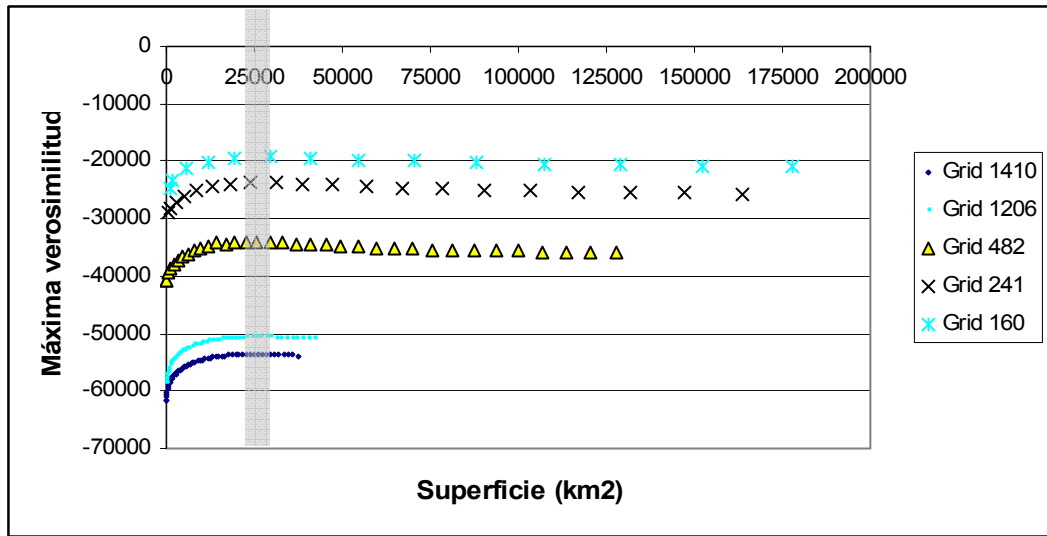
Pero, sobre todo, la estimación de la función auto-Poisson nos permite caracterizar la distribución espacial completa del conjunto de sucesos considerados, de hecho, nos indica la probabilidad de que exista un determinado nivel de actividad en una localización condicionada a la actividad existente en un entorno determinado de la misma. En este sentido, la estimación de la función de distribución espacial auto-Poisson, nos indica la intensidad con que la interdependencia espacial condiciona la localización de sucesos en el espacio considerado, aproximando de alguna manera la ley que gobierna la dinámica espacial del mismo. Este cálculo, y la comparación entre la situación de 1980 y la de 2002, se puede realizar con los parámetros estimados para cualquier tamaño de cuadrícula y orden de recuento considerados, sin embargo, por sencillez expositiva, vamos a centrarnos para ilustrar nuestros resultados en la estimación correspondiente a la cuadrícula $m=160$ y orden de recuento 6.²¹

Haciendo uso de los parámetros estimados en ese caso, la distribución espacial de la actividad económica en la UE vendría dada por la expresión de la función auto-Poisson recogida en (2), con $A = 244.14$ km², $\lambda=4319.0269$ y $\rho=1.0071199$, para 1980 y $\lambda=4694.3739$ y $\rho=1.00653$ para el año 2002.

²⁰ Por ejemplo, si nos centramos en la cuadrícula con $m= 160$, los mayores valores de la máxima verosimilitud los conseguimos, tanto para la distribución espacial del PIB en 1980 como en 2002, con las estimaciones correspondientes a un orden de recuento de 6, lo que equivale a considerar un entorno de interacción de 29.297 km².

²¹ Este orden de recuento es con el que se obtiene el máximo del log de la función de verosimilitud más elevado con el tamaño de cuadrícula considerado ($m=160$).

FIGURA 9. Valores máximos alcanzados por las funciones de verosimilitud en función de la superficie considerada para distintas cuadrículas



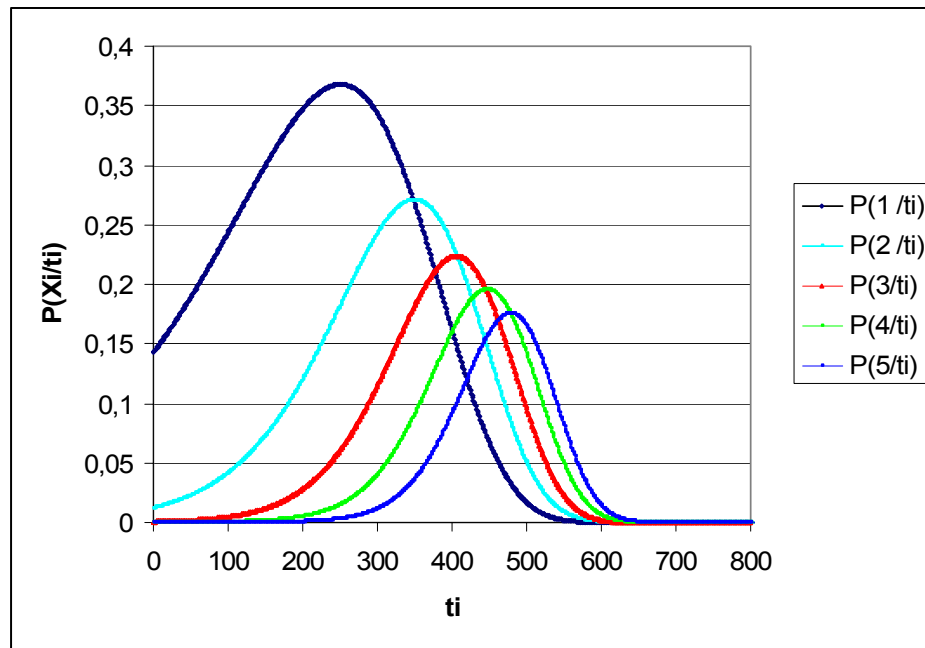
En la figura 10 se puede observar los valores de $P(x_i|t_i)$, para $x_i = 1, \dots, 5$ y $t_i = 0, 1, \dots, 800$ con los parámetros λ y ρ estimados para 1980.²² La representación de $P(x_i|t_i)$, para estos valores de x_i es suficiente, dado que reflejan adecuadamente las características de la distribución completa, ya que se puede demostrar que:²³

1. Dado un valor de x_i , la $P(x_i|t_i)$ se incrementa con t_i hasta llegar a un máximo, disminuyendo después de forma asintótica.
2. A medida que se incrementa x_i se tiene que incrementar t_i para alcanzar dicho máximo.
3. A medida que se incrementa x_i la probabilidad condicionada máxima va disminuyendo.

²² Como ya se ha mencionado, la función auto-Poisson, en presencia de agrupación, presenta un problema de no integrabilidad, que sólo es relevante a partir de t_i suficientemente elevados. La incidencia en nuestro caso puede verse en la figura 1 del Apéndice E.

²³ Ver demostraciones en el Apéndice D.

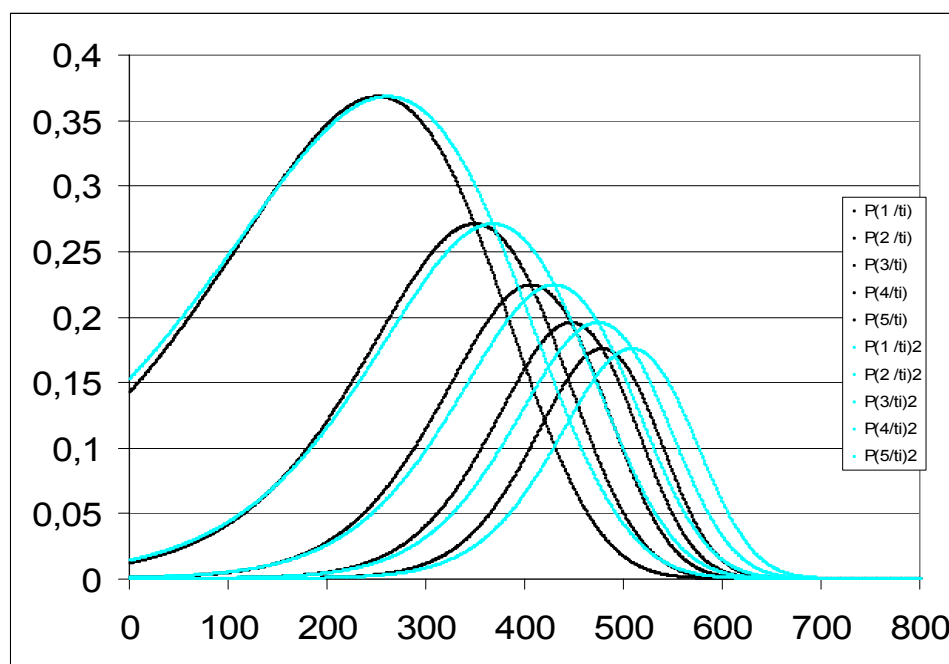
FIGURA 10. Funciones de probabilidad condicionada para la UE (1980), desde $x_i=1$ (el de mayor máximo) hasta $x_i=5$



Utilizando las mismas estimaciones, en la figura 11 se muestran, para los mismos valores de x_i y t_i de la figura 10, las $P(x_i|t_i)$ correspondientes a 1980 (curvas más oscuras) y 2002 (curvas más claras) para el conjunto de países de la UE considerados. Como se puede observar, las curvas que recogen la probabilidad de que exista un determinado nivel de actividad correspondientes al año 2002 alcanzan su máximo, siempre para valores de t_i superiores a los valores de 1980 y este desplazamiento a la derecha de los valores máximos de $P(x_i|t_i)$ es tanto mayor cuanto mayor sea x_i . Estas propiedades dependen críticamente del grado de agrupamiento de las correspondientes nubes de puntos,²⁴ e indican que para entornos con bajo nivel de actividad (t_i pequeños) la probabilidad de encontrar un determinado número de unidades de PIB (x_i) ha tendido a reducirse entre 1980 y 2002, mientras que a partir de una determinada intensidad del nivel de actividad del entorno (t_i grandes), la probabilidad de encontrar esas mismas unidades de PIB ha aumentado. Lo que implica que, a lo largo del período considerado y en promedio para la UE, se ha incrementado la probabilidad de encontrar actividad

²⁴ Ver demostración en el Apéndice D.

FIGURA 11. Funciones de distribución espacial del PIB en la UE (1980 y 2002)
 (siguiendo el método normal de distribución de puntos dentro de cada región)



económica en las zonas en cuyo entorno existe un mayor nivel de actividad económica, por lo que podemos afirmar que entre 1980 y 2002, en el conjunto de países de la UE considerados, se ha incrementado²⁵ el grado de concentración espacial de la actividad económica (aumentando la heterogeneidad espacial).

Estos resultados indican que a pesar de las políticas regionales articuladas desde la Comisión Europea, en promedio, las fuerzas tendentes a incrementar la aglomeración en las zonas donde existe mayor nivel de actividad siguen siendo dominantes y se han intensificado en detrimento de las zonas con menores niveles de actividad. Así mismo, los resultados obtenidos están en sintonía con el descenso que se viene detectando en los ritmos de convergencia regional en Europa.

²⁵ Aunque no se reportan los cálculos, se ha comprobado que los resultados no cambian cualitativamente si utilizamos las estimaciones para otro tamaño de cuadrícula.

3.3. *Contraste del método utilizado de distribución intra-regional del PIB*

Estos resultados, son además robustos al método de distribución intra-regional del PIB. Como ya hemos indicado, se ha llevado a cabo un análisis de sensibilidad del método utilizando de localización de puntos en cada región, repitiendo las estimaciones con nubes de puntos construidas en cada región por medio del método regular determinista que ya hemos descrito. En el análisis de sensibilidad se han utilizado los mismos tamaños de cuadrícula y órdenes de recuento que en la sección anterior. Los principales resultados obtenidos en la comparación de ambos métodos para la cuadrícula correspondiente a $m=160$ se presentan en la tabla 6 del Apéndice E, sin que los cálculos para otros tamaños de cuadrículas proporcionen resultados diferentes. Lo primero que queremos destacar es que a pesar de la diferencia radical del método de construcción de las nubes de puntos en cada región, existe una gran similitud en los resultados obtenidos en las estimaciones por ambos métodos. La máxima verosimilitud la conseguimos, tanto para la distribución espacial del PIB en 1980 como en 2002, con órdenes de recuento equivalentes a los obtenidos en la sección anterior. Por último, la figura 12 (réplica de la figura 11) ilustra el resultado que se obtiene con las estimaciones de la función auto-Poisson a partir de la nueva distribución de puntos intra-regional.

En síntesis, como se puede ver fácilmente por la simple comparación de las figuras 11 y 12, las características de la distribución del PIB que se obtiene en ambos casos y la evolución temporal de la concentración del PIB entre 1980 y 2002, es prácticamente indistinguible. Esta comparación nos permite afirmar que los resultados obtenidos son atribuibles más que a nuestra hipótesis de distribución de puntos dentro de cada región al peso relativo de cada región y a su localización respecto a las demás.

3.4. *Evolución de la concentración del PIB en distintos países de la UE*

Por último, en las tablas 2 y 3 y en las figuras 13 a 18, se presentan los resultados obtenidos al analizar la distribución espacial de la actividad económica dentro de cada país, así como los cambios que se han producido entre 1980 y 2002.²⁶ En todos los casos hemos utilizado el método normal de distribución intra-regional de los puntos que reflejan su nivel de actividad, mientras que el número total de puntos de

²⁶ En el análisis individual de los países considerados, y debido a que como ya se ha mencionado el detalle espacial de la información disponible varía de uno a otro, se presenta conjuntamente los resultados de Bélgica Holanda y Luxemburgo (Benelux), mientras que no se han considerado Irlanda o Portugal.

FIGURA 12. Funciones de distribución espacial del PIB en la U.E (1980 y 2002)
(siguiendo el método regular de localización de puntos intra-regional)

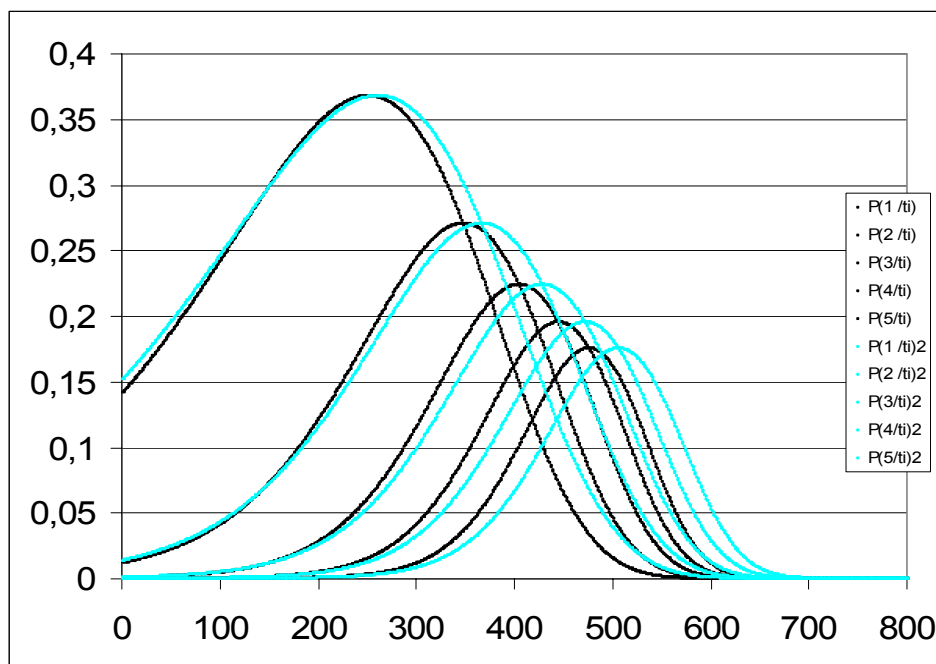


TABLA 2. Cálculo del ICS para países de la UE (grid m=10 y m=63).

4000 p	ICS10	σ	p-valor	ICS63	σ	p-valor
Ale(1980)	115,007	2,362428		6,10478	0,29163	
Ale(2002)	106,202	2,220059	0	5,58766	0,29235	0
4000 p	ICS10	σ	p-valor	ICS63	σ	p-valor
Esp(1980)	131,819	2,701084		10,7628	0,45859	
Esp(2002)	148,577	3,195556	0	12,301	0,52209	0
4000 p	ICS10	σ	p-valor	ICS63	σ	p-valor
Fra(1980)	189,496	1,952495		86,2912	1,66202	
Fra(2002)	211,383	1,959463	0	105,264	2,7221	0
4000 p	ICS10	σ	p-valor	ICS63	σ	p-valor
GBr(1980)	193,545	3,369825		15,1008	0,5228	
GBr(2002)	221,811	4,06746	0	16,5695	0,56857	0
4000 p	ICS10	σ	p-valor	ICS63	σ	p-valor
Ita(1980)	172,248	3,540447		6,64017	0,26314	
Ita(2002)	172,73	3,969533	0,81756	6,59517	0,26986	0,11623
4000 p	ICS10	σ	p-valor	ICS63	σ	p-valor
Benelux(1980)	65,034	1,6099		3,731	0,21258	
Benelux(2002)	71,559	2,0006	0	4,462	0,23355	0

TABLA 3. Valor de los parámetros que permiten obtener la mayor máxima verosimilitud en el ajuste auto-Poisson en países de la UE. (grid m=160).

4000 p	λ	ρ	Orden recuento
Ale(1980)	1498	1,006811	11
Ale(2002)	1315	1,007803	11
4000 p	λ	ρ	Orden recuento
Esp(1980)	1781	1,008433	8
Esp(2002)	1873	1,007417	8
4000 p	λ	ρ	Orden recuento
Fra(1980)	3047	1,008742	3
Fra(2002)	3000	1,00813	3
4000 p	λ	ρ	Orden recuento
GBr(1980)	1367	1,003404	15
GBr(2002)	1359	1,002898	16
4000 p	λ	ρ	Orden recuento
Ita(1980)	1510	1,008028	9
Ita(2002)	1483	1,008167	9
4000 p	λ	ρ	Orden recuento
Benelux(1980)	1788,67	1,008655	10
Benelux(2002)	1927	1,007618	10

FIGURA 13. Alemania

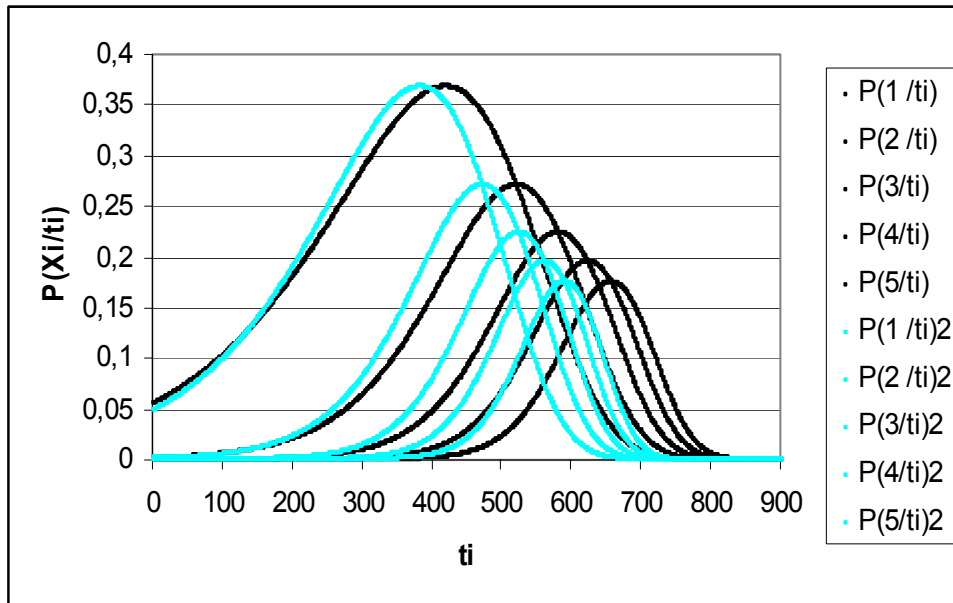


FIGURA 14. España

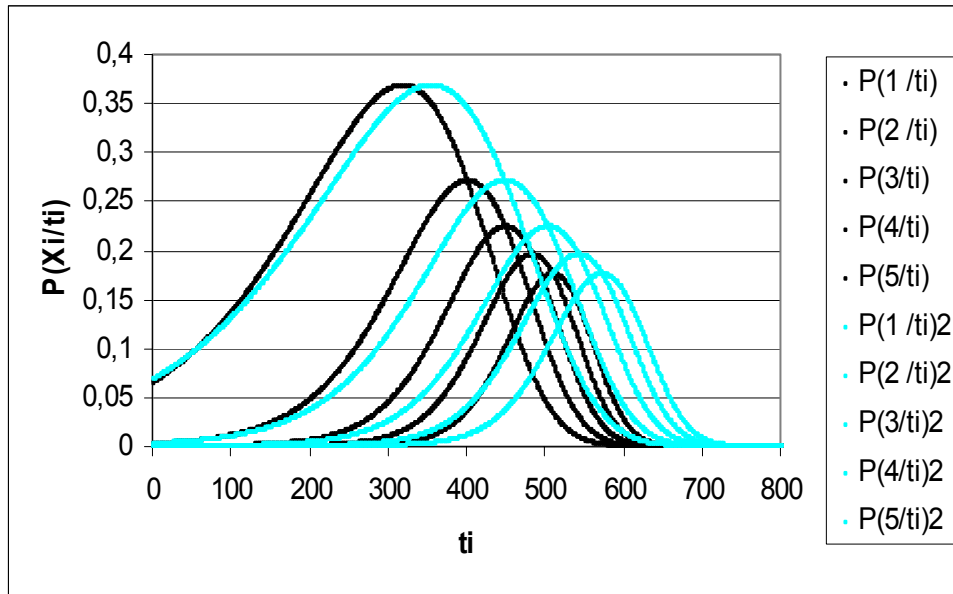


FIGURA 15. Francia

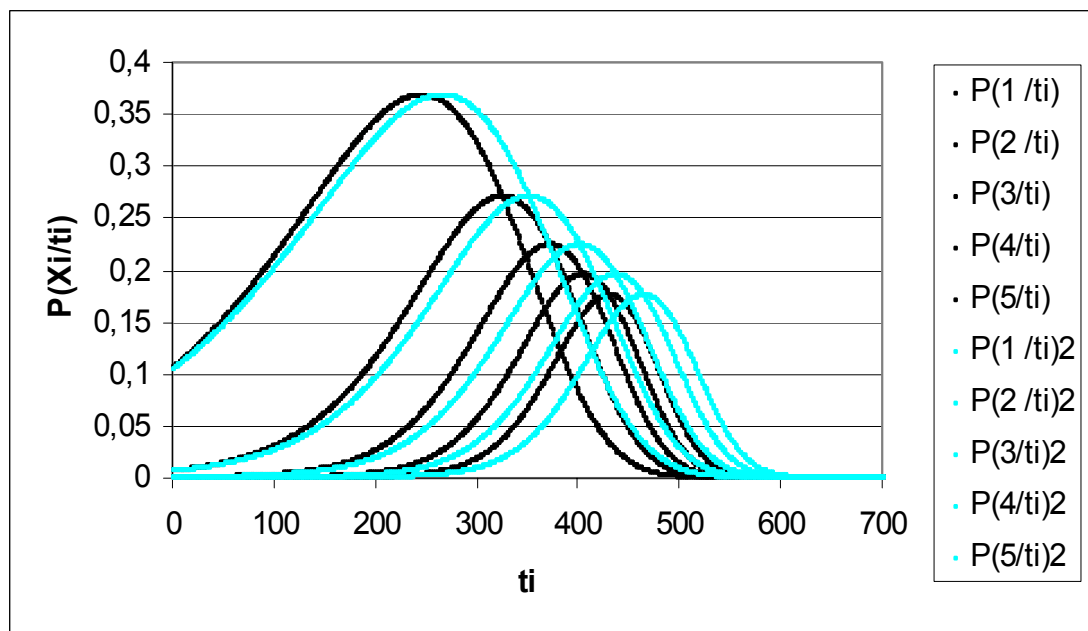


FIGURA 16. Gran Bretaña

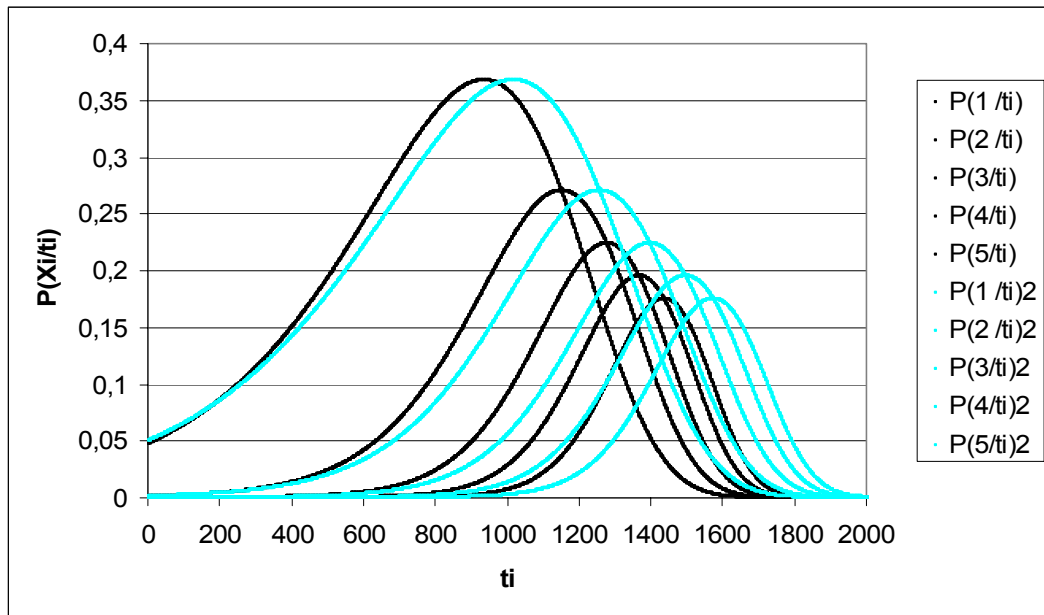


FIGURA 17. Italia

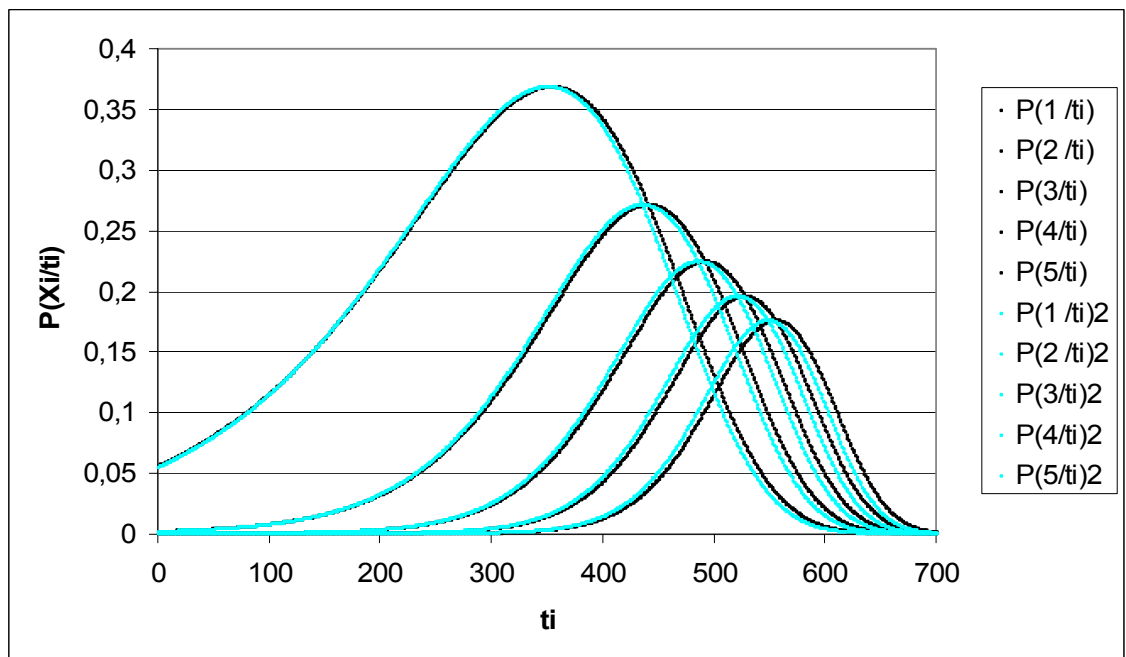
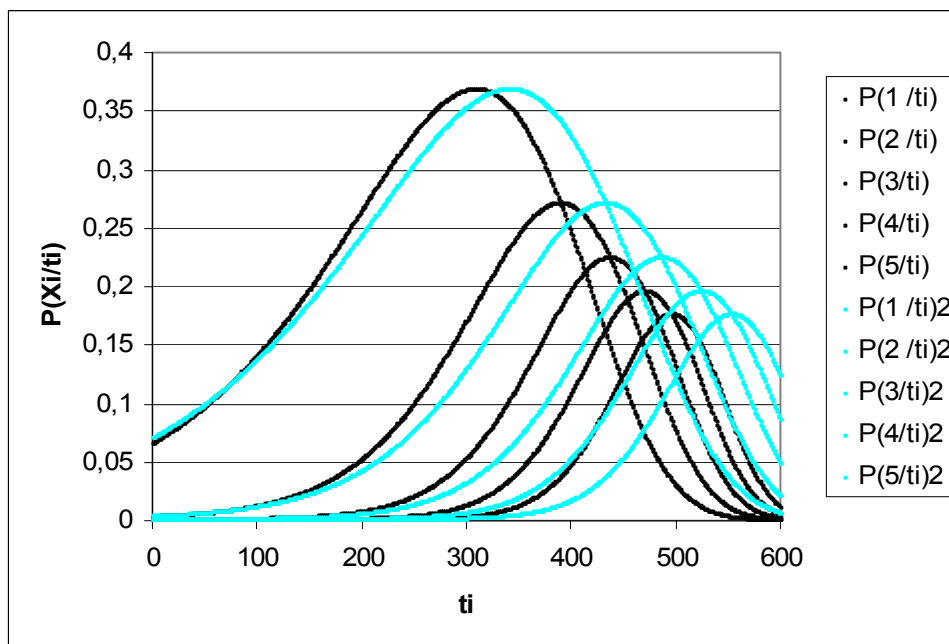


FIGURA 18. Benelux



cada país se ha normalizado a 4000. El cálculo del ICS se ha efectuado sobre cuadrículas con $m=10$ y 63 ,²⁷ mientras que en el ajuste de la función auto-Poisson sólo hemos utilizado una cuadrícula con $m=160$ y los valores de los parámetros estimados recogidos en las tablas son sólo los correspondientes al orden de recuento para el que se alcanzan los mayores valores de la función de verosimilitud en el correspondiente proceso de maximización²⁸ con la citada cuadrícula para cada país.

De nuevo, en todos los países considerados y tanto si nos fijamos en los ICS como en las estimaciones de ρ existen signos evidentes de una distribución espacial de la actividad económica que exhibe desigualdades. La concentración, el agrupamiento, es la norma en todos los países considerados, aunque existen diferencias entre ellos.

²⁷ Para obtener el tamaño de cuadrícula $m=63$, se ha procedido igual que en el caso anterior, siendo 63 la parte entera de \sqrt{p} , con $p=4000$ (puntos de la nube).

²⁸ En todos los casos, el orden de recuento para el que la función de verosimilitud alcanza su mayor valor en el proceso de maximización es el mismo para 1980 y 2002, con la excepción de Gran Bretaña. En este caso se ha comprobado que el cambio en el orden de recuento no afecta al resultado presentado.

En segundo lugar, tanto por el comportamiento de las funciones de probabilidad condicionada, $P(x_i|t_i)$, como por los resultados del ICS, se puede concluir que durante las dos décadas consideradas se ha incrementado la concentración espacial de la actividad económica en el Benelux, España, Francia y Gran Bretaña. Alemania es el único país que presenta un claro incremento de la dispersión espacial de la actividad económica entre 1980 y 2002. En este caso, como se puede ver en la figura 14, la probabilidad de encontrar diferentes magnitudes de actividad económica (x_i) en 2002 se ha incrementado respecto a 1980 en entornos con bajo nivel de actividad (menores t_i) y se ha reducido para entornos con mayor nivel de actividad. El resultado más incierto lo obtenemos con Italia: mientras que las diferencias entre los valores calculados del ICS para 1980 y 2002 no son significativas (tabla 13), la representación gráfica de la función auto-Poisson (figura 18), sólo parece indicarnos que se podría haber producido un ligero incremento de la dispersión espacial del PIB.

4. Consideraciones finales

En este trabajo se presentan diferentes técnicas estadísticas que permiten aproximar una de las dimensiones que habitualmente ha resultado más esquivas al análisis empírico, la espacial.

El ICS (*index of cluster size*) nos proporciona un indicador sencillo del agrupamiento existente entre los sucesos objeto de análisis en el espacio considerado, sin embargo, con la parametrización y estimación de la función auto-Poisson se da un paso más, ya que se consigue detectar aquellas situaciones en las que existe dependencia espacial, proponiendo un modelo probabilístico que la recoja, de tal manera, que la magnitud de la probabilidad condicionada revela la intensidad con que la interdependencia espacial condiciona la localización de los distintos sucesos en el espacio considerado. Creemos interesante destacar que al ajustar una función auto-Poisson no sólo obtenemos una función de probabilidad condicionada, si no que, cuando nos aproximamos al límite teórico, se obtiene como subproducto un indicador de la magnitud de la agrupación del patrón de puntos modelizado.

Para dotar a nuestros datos de la adecuada dimensión espacial, se ha procedido a combinar información sobre coordenadas planas de las distintas regiones en las que se divide el área de análisis, con hipótesis sobre la distribución espacial interna del nivel de actividad en cada una de ellas, y a partir de dicha información hemos procedido a

analizar las características de la distribución espacial de la actividad económica y su evolución temporal en diez países de la Unión Europea, tanto conjuntamente como país a país.

El método básico utilizado en la construcción de los patrones de puntos de cada región ha sido el que hemos denominada método normal, que supone que la actividad se distribuye en cada región de forma decreciente en el espacio a partir de su núcleo o coordenada central. Para contrastar la robustez de nuestros resultados, hemos efectuado un análisis de sensibilidad utilizando como método alternativo para construir los patrones de puntos de las diferentes regiones un método determinista y regular, que distribuye de forma regular los puntos en una superficie equivalente a la de la región considerada, obteniendo con este método los mismos resultados que con el normal.

En síntesis, podemos decir que nuestros resultados informan de una fuerte heterogeneidad (desigualdad) en la distribución espacial de la actividad económica en Europa, que además muestra evidentes signos de persistencia. Así, tanto de los cálculos del ICS, como de las estimaciones de la función de distribución auto-Poisson, que en todos los casos revelan un elevado grado de polarización económica, durante el período considerado se ha producido un aumento en el grado de concentración estimado de la distribución espacial de la actividad económica en Europa.

Así pues, no parece existir evidencia consistente con una reducción significativa en los desequilibrios regionales en términos de PIB en Europa, al menos entre 1980 y 2002. Lo que pone de manifiesto que el conjunto de fuerzas centrífugas y centrípetas generadas por los procesos de crecimiento y de integración económica de los distintos países y regiones europeas, junto a las políticas económicas adoptadas (incluidas las políticas regionales), han tenido el efecto de reforzar, o no han sido capaces de contrarrestar, las desigualdades espaciales en Europa. De modo que, hoy por hoy, la probabilidad de que los aumentos en la actividad económica se produzcan en entornos donde ésta se localiza actualmente es elevada y se ha incrementado a lo largo del período considerado.

Por otra parte, nuestro análisis por países revela que el fenómeno de la concentración espacial de la actividad económica es también la norma a nivel estatal, aunque desde la perspectiva de su evolución temporal encontramos todas las posibilidades. Por un lado tenemos un conjunto de países –Benelux, España, Francia y Gran Bretaña - para los que se producen aumentos en los indicadores de aglomeración y por tanto de la tendencia a la concentración de actividad de distinta magnitud. En el otro

extremo tenemos el caso de Alemania Federal, que presenta signos de incrementos en la dispersión de la actividad económica (lo que sería consistente con una elevada saturación de actividad económica del espacio y con efectos de congestión en algunas zonas) y, finalmente el caso de Italia, donde no se aprecian cambios significativos en la distribución espacial de la actividad económica.

Estos resultados son consistentes con el estancamiento de la convergencia regional detectada para el conjunto de Europa desde mediados de los 80²⁹ y, probablemente, nos proporcionan un dato relevante adicional al análisis de dicha ralentización, al poner de manifiesto que en la dinámica observada en la renta per cápita ha jugado un papel central la dinámica espacial del nivel de actividad y, evidentemente, plantean una exigencia a las posibles explicaciones de la dinámica observada, que deben ser consistentes con el incremento de la tendencia a la concentración espacial de la actividad económica que se está produciendo en buena parte de Europa.

²⁹ Ver Martín (2001)

Referencias

- Albert, J.M., Albert, M., Mateu, J. and Pernías, J.C. (1997): Sppa, spatial point pattern analysis. Computer software developed by the authors, Universitat Jaume I, Castelló, 1997.
- Albert, J.M., Mateu, J. and Pernías, J.C. (2000): Spatial structure analysis using planar indices. *Quaderns d'Estadística i Investigació Operativa (Qüestió)*, 24(1):27-51.
- Albert, J.M., Mateu, J. and Pernías, J.C. (2002): Modelling of spatial point processes derived from a sequence of auto-poisson lattice schemes. *Environmental Modelling and Software*, 17(2):105-123.
- Barro, R. and Sala-i Martin, X. (1995): *Economic Growth*. McGraw-Hill. New York.
- Besag, J. (1974): Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society*, 36:192-236.
- Besag, J. (1977): Some methods of statistical analysis for spatial data. *Bulletin of the International Statistical Institute*, 47:77-92.
- Besag, J., Milne, R. and Zachary, S. (1982): Point process limits of lattice processes. *Journal of Applied Probability*, 19:210-216.
- Combes, P.-P. and Overman, H. (2004): "The spatial distribution of economic activities in the EU". *Handbook of Regional and Urban Economics*, vol. 4. Elsevier.
- Cox, R. and Isham, V. (1980): *Point processes*. Chapman & Hall, London.
- Choi, E.K. and Harrigan, J. (eds.) (2003): *Handbook of International Trade*. Blackwell Publishing Ltd.
- David, F.N. and Moore, P.G. (1954): Notes on contagious distributions in plant populations. *Annals of Botany of London*, 18:47-53.
- Diggle, P.J. (1983): *Statistical Analysis of Spatial Point Patterns*. Academic Press, London.
- Douglas, J.B. (1975): *Clustering and aggregation*. Sankhya. Series B, 37, 398-417.
- Duraton, G. and Overman, H. (2002): "Testing for localization using micro-geographic data" CEPR discussion paper, no. 3379.
- Eurostat. New cronos: regio, econ-r, gdp (millions of ppp), esa79 and esa 95.,nut level 3. Electronic publication, Eurostat, 2003.
- Fujita, M., Krugman, P. and Venables, A.J. (1999): *The Spatial Economy*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Kelly, F.P. and Ripley, B.D. (1976): On Strauss model for clustering. *Biometrika*, 63:357-360.

- Martin, R. (2001): EMU versus the regions? Regional convergence and divergence in Euro land. *Journal of Economic Geography*, 1:51-80, 2001.
- Microsoft. Atlas encarta 98. Electronic publication, Microsoft, 1998.
- Midelfart-Knarvik, K.H., Overman H.G., Redding S.J., and Venables, A.J. (2000): The location of European industry. *Economic Papers*, 142.
- Moreno, R, y Vayá, E. Econometría Espacial: nuevas técnicas para el análisis regional. Una aplicación a las regiones europeas. *Investigaciones Regionales*, otoño 2002.
- Morton, A. (2003): Tm ll.xls workbook. Electronic publication, Distribution mapping software (DMAP), www.dmap.co.uk.
- Neary, P. (2001): “Of hype and hyperbolas: Introducing the new economic geography”. *Journal of Economic Literature*, 39, June: 536-61.
- Ottaviano, G. and Puga, D. (1997): “Agglomeration in the global economy: A survey of the new economic geography” *World Economy*, 21, 6: 707-31.
- Overman, H.G., Redding, S., and Venables, A.J. (2003): “ The Economic Geography of Trade, Production, and Income: A Survey of Empirics”. In Choi and Harrigan (2003), Chapter 12: 353-387.
- Preston, C.J. (1977): Spatial birth-and-death processes. *Bulletin of the International Statistical Institute*, 46: 371-391.
- Puga, D. (2002): European regional policies in light of recent location theories. *Journal of Economic Geography*, 2:373-406.
- Quah, D.T. (1996) : Regional convergence clusters across Europe. *European Economic Review*, 40:951-958.
- Quah, D. and Simpson, H. (2003). Spatial Cluster Empirics. Working Paper, Economics Dpt., LSE, London, June.
- Ripley, B.D. (1977): Modelling spatial patterns (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society*, B 39:172-212.
- Ripley, B.D. and Kelly, F.P. (1977). Markov Point Processes. *Journal of the London Mathematical Society*, 15:188-192.
- Ruelle, D. (1969) : *Statistical Mechanics*. Wiley, New York.
- Serfling, R.J. (1980). *Approximations Theorems of Mathematical Statistics*. Wiley&Sons, New York.
- Strauss, D.J. (1975): A model for clustering. *Biometrika*, 63:467-475.

Trivez, F.J., Mur, J., Angulo, A., Ben Kaabia, M., y Catalán, B. *Contribution in spatial econometrics*. Edit. CC. Zaragoza. 2005.

Venables, A.J. (1995): Economic integration and the location of firms. *American Economic Review*, 85(2):296-300.

Apéndices.

Apéndice A.

Es bien conocido que el ICS para valores de n suficientemente grandes se distribuye asintóticamente como una normal, y puede demostrarse que si tenemos una muestra independiente e idénticamente distribuida x_1, x_2, \dots, x_n proveniente de una distribución cualquiera, entonces³⁰

$$ICS \approx N\left(\frac{\sigma^2}{\mu} - 1, \frac{1}{n}\left(\frac{\sigma^6}{\mu^4} + \frac{\mu_4 - \sigma^4}{\mu^2} - \frac{2\mu_3\sigma^2}{\mu^3}\right)\right)$$

donde $\mu = E(x_i)$ y μ_i representa el momento de orden i con respecto a la media (para $i=2, 3, 4$). Mediante simulaciones de Monte Carlo hemos observado³¹ que en presencia de agrupamiento el comportamiento normal del ICS depende tanto del tamaño de la cuadrícula como del número de puntos. En patrones con 1000 puntos, a partir de una cuadrícula de 10x10 (este valor incluido) y hasta cuadrículas de 40x40, se observa siempre un comportamiento normal, pero a partir de 50x50 empezamos a observar cuadrículas para las que el comportamiento del ICS ya no sigue una distribución normal. A medida que incrementamos el número de puntos se incrementa el tamaño de cuadrícula en las que se observa el comportamiento normal, por ejemplo, para patrones con 2500 puntos el comportamiento normal deja de observarse a partir de cuadrículas de 200x200.

En el caso particular de la distribución de Poisson con media poblacional μ , y dado que $\mu_3 = \sigma^2 = \mu$, $\mu_4 = \mu(3\mu + 1)$, el ICS se distribuye como

$$ICS \approx N\left(0, \frac{2}{n}\right)$$

No obstante, para pequeñas muestras aún se puede utilizar una aproximación más adecuada en el caso de la distribución de Poisson, en este caso el ICS se distribuirá como

³⁰ Esto es una consecuencia directa del “método delta”, cuyos principales resultados pueden encontrarse en el capítulo 3 de Serfling (1980).

³¹ Albert *et al* (2000).

$$ICS \approx \frac{\chi_{n-1}^2}{n-1} - 1$$

Apéndice B: Estimación de la función auto-Poisson.

En cuanto a la estimación de los parámetros de la función auto-Poisson, el proceso de maximización de (3) se puede realizar de la siguiente forma.

Las condiciones de primer orden de máximo de (3) vienen dadas por

$$\frac{\partial \ln(PL)}{\partial \lambda} = 0 = -A \sum \rho^{t_i} + \frac{\sum x_i}{\lambda} \quad (B.1)$$

$$\frac{\partial \ln(PL)}{\partial \rho} = 0 = -A \lambda \sum t_i \rho^{t_i-1} + \frac{\sum t_i x_i}{\rho} \quad (B.2)$$

De donde

$$\frac{\partial \ln(PL)}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\sum x_i}{A \sum \rho^{t_i}} \quad (B.3)$$

Sustituyendo (B.3) en (3) obtenemos una función de verosimilitud que tiene a ρ como única variable

$$\ln(PL)_\rho = -\sum x_i + \left[\ln A + \ln \frac{\sum x_i}{A \sum \rho^{t_i}} \right] \sum x_i + (\ln \rho) \sum t_i x_i - \sum \ln x_i! \quad (B.4)$$

y finalmente, agrupando en B todos los términos independientes de ρ

$$\ln(PL)_\rho = B - \left[\ln \sum \rho^{t_i} \right] \sum x_i + (\ln \rho) \sum t_i x_i \quad (B.5)$$

donde $B = \sum x_i \left[(\ln \sum x_i) - 1 \right] - \sum \ln(x_i !)$.

La maximización de la función de verosimilitud (B.5) presenta el problema de la restricción $\rho > 0$. Este problema de maximización con restricciones se transforma en uno sin restricciones si se define un nuevo parámetro δ tal que $\rho = e^\delta$ y maximizamos

$$\ln(PL)_\delta = B - \left[\ln \sum e^{\delta t_i} \right] \sum x_i + \delta \sum t_i x_i \quad (\text{B.6})$$

Esta función es continua para $-\infty < \delta < \infty$. Comprobemos ahora que se trata de una función cóncava y con un máximo, con lo cual este máximo sería absoluto y único.

Supongamos que $y = \ln(PL)_\delta$

$$\frac{\partial y}{\partial \delta} = - \frac{\sum_{i=1}^n t_i e^{\delta t_i}}{\sum_{i=1}^n e^{\delta t_i}} \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n t_i x_i \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \delta^2} = - \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^n t_i^2 e^{\delta t_i} \right) \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n e^{\delta t_i} - \left(\sum_{i=1}^n t_i e^{\delta t_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n t_i e^{\delta t_i} \right) \sum_{i=1}^n x_i}{\left(\sum_{i=1}^n e^{\delta t_i} \right)^2} \right] \quad (\text{B.8})$$

El signo de (B.8) depende de

$$\left(\sum_{i=1}^n t_i^2 e^{\delta t_i} \right) \sum_{i=1}^n e^{\delta t_i} - \left(\sum_{i=1}^n t_i e^{\delta t_i} \right)^2 \quad (\text{B.9})$$

La parte izquierda de (B.9) es igual a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 e^{\delta t_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n e^{\delta t_i} \right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_i^2 e^{\delta t_i} e^{\delta t_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n t_i^2 e^{\delta t_i} e^{\delta t_j} + \sum_{i=1}^n t_i^2 e^{2\delta t_i} = \\ &\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n t_i^2 e^{\delta t_i} e^{\delta t_j} + \sum_{i=2}^n \sum_{j<i}^{n-1} t_i^2 e^{\delta t_i} e^{\delta t_j} + \sum_{i=1}^n t_i^2 e^{2\delta t_i} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Y la parte derecha de (B.9) es igual a

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n t_i e^{\delta t_i} \right)^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_i t_j e^{\delta t_i} e^{\delta t_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n t_i t_j e^{\delta t_i} e^{\delta t_j} + \sum_{i=1}^n t_i^2 e^{2\delta t_i} = \\
&\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^{n-1} t_i t_j e^{\delta t_i} e^{\delta t_j} + \sum_{i=2}^n \sum_{j<i}^{n-1} t_i t_j e^{\delta t_i} e^{\delta t_j} + \sum_{i=1}^n t_i^2 e^{2\delta t_i} = \\
&\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n 2t_i t_j e^{\delta t_i} e^{\delta t_j} + \sum_{i=1}^n t_i^2 e^{2\delta t_i}
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Haciendo uso de (B.10) y (B.11), (B.9) puede reescribirse del siguiente modo

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n (t_i^2 + t_j^2) e^{\delta t_i} e^{\delta t_j} - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n 2t_i t_j e^{\delta t_i} e^{\delta t_j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n (t_i - t_j)^2 e^{\delta(t_i+t_j)} \tag{B.12}$$

En consecuencia, si existe algún $i, j | t_i \neq t_j$, entonces la ecuación (B.8) es estrictamente positiva, lo cual implica que la función y es estrictamente cóncava.

Puesto que la función y es cóncava, una condición necesaria y suficiente para tener un máximo es que su primera derivada sea igual a cero. Tomando límites en la expresión (B.7)

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \rightarrow -\infty} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{e^{\delta t_i}}{\sum_{j=1}^n e^{\delta t_j}} t_i \right) \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n t_i x_i &= - \left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n e^{\delta(t_j-t_i)} + 1} \right) \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n t_i x_i = \\
&\left(- \min_{i|1,2,\dots,n} t_i \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n t_i x_i \right) > 0
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Este límite garantiza que existe un $\delta_1 | \left(\frac{\partial y}{\partial \delta}(\delta_1) \right) > 0$

Y por otra parte

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n e^{\delta(t_j-t_i)} + 1} \right) \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n t_i x_i = \left(- \max_{i|1,2,\dots,n} t_i \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n t_i x_i \right) < 0 \tag{B.14}$$

Esta ecuación implica que $\exists \delta_2 | \left(\frac{\partial y}{\partial \delta}(\delta_2) \right) < 0$.

Por continuidad de la función $\frac{\partial y}{\partial \delta}$, $\exists \bar{\delta} \mid \frac{\partial y}{\partial \delta}(\bar{\delta}) = 0$.

Como conclusión podemos afirmar que dados el número de celdas (n) y los recuentos de puntos alrededor de cada celda i (t_i), si existen al menos dos recuentos distintos, la función y es estrictamente cóncava y tiene un máximo local, por lo tanto ese máximo es global y único.

La estrategia de estimación puede basarse en la maximización de (B.6) mediante el algoritmo de Newton utilizando las ecuaciones (B.7) y (B.8). A partir de la estimación de δ se obtiene la estimación de ρ dada la relación $\rho = e^{\delta}$. A partir de aquí ya podemos estimar λ a través de (B.3).

Apéndice C.

Con carácter general, la función de densidad de los procesos de interacción entre pares de puntos presenta la siguiente forma

$$f(x) = \alpha \prod_{i=1}^{p(x)} b(x_i) \prod_{i < j} \phi(x_i, x_j)$$

donde $p(x)$ es el número de puntos del patrón de puntos, $b(x_i)$ se asocia a la intensidad y localización de los puntos, $\phi(x_i, x_j)$ es una función de interacción que introduce la dependencia entre los distintos puntos, y $\alpha > 0$ es la constante normalizadora, normalmente desconocida.

El proceso de Strauss homogéneo (Strauss, 1975) es un proceso de interacción entre pares con $b(x_i) = \lambda$ constante, y con una función de interacción $\phi(x_i, x_j) = \rho$ si $\|x_i - x_j\| \leq d$, e igual a 1 en cualquier otro caso. Los valores de $d > 0$ definen la distancia de interacción y $0 \leq \rho \leq 1$ es el parámetro de interacción. Por tanto, podemos representar la función de densidad anterior en función de los parámetros (λ, ρ) como

$$f(x) \propto \lambda^{p(x)} \rho^{s(x)}$$

En esta expresión, el parámetro λ nos informa sobre la intensidad del proceso, y su exponente está relacionado con el número total de puntos del proceso, mientras que el parámetro ρ nos informa del agrupamiento de los puntos, y su exponente es una función de interacción relacionada con el número de puntos del proceso que podemos encontrar en un círculo de radio determinado d , dentro de dicho proceso.

El caso $\rho=1$ define un proceso de Strauss plano y homogéneo, mientras que $\rho < 1$ define un proceso simple de inhibición (regular). Strauss originalmente propuso la expresión (16) con $\rho > 1$ como un modelo para patrones con agrupamiento pero, como posteriormente demostraron Kelly y Ripley (1976), este supuesto violaba el requisito de una constante normalizadora finita en la ecuación (15) que garantizara su integrabilidad.

Apéndice D: Comportamiento de la función auto-Poisson.

Dados A , $\lambda > 0$ y $\rho > 1$, la función $P(x_i|t_i)$ recogida en (2), para $x_i = 0, 1, 2, \dots$ y $t_i = 0, 1, 2, \dots$, tiene las siguientes propiedades:

1º) Si $x_i = 0$ y suponiendo $0! = 1$

$$P(0|t_i) = e^{-A\lambda\rho^{t_i}} \rightarrow \frac{\partial(P(0|t_i))}{\partial t_i} < 0$$

Si $x_i > 0$ y $(A\lambda) < x_i$

$$\frac{\partial P(x_i|t_i)}{\partial t_i} = \frac{(A\lambda)^{x_i}}{x_i!} e^{-A\lambda\rho^{t_i}} (x_i - A\lambda\rho^{t_i}) (\rho^{x_i t_i} \ln \rho) \quad (D.1)$$

El signo de (D.1) depende de

$$(x_i - A\lambda\rho^{t_i}) \quad (D.2)$$

expresión que es decreciente ante incrementos de t_i .

De modo que $P(x_i|t_i)$ es creciente con t_i , para todo t_i , tal que $(x_i - A\lambda\rho^{t_i}) > 0$;

$P(x_i|t_i)$ es decreciente con t_i , para todo t_i tal que $(x_i - A\lambda\rho^{t_i}) < 0$ y, lógicamente la función $P(x_i|t_i)$ tiene un máximo para el valor de t_i que haga $(x_i - A\lambda\rho^{t_i}) = 0$, por lo tanto, a medida que se incrementa x_i hay que incrementar t_i para alcanzar dicho máximo.

2º) El máximo de la función de probabilidad condicionada para un determinado x_i disminuye con el valor de x_i . Dado que para alcanzar el valor máximo de $P(x_i|t_i)$, se tiene que

cumplir que $x_i = A\lambda\rho^{t_i}$ y denotando como $f(x_i)$ al valor máximo de $P(x_i|t_i)$, de (2) se tiene que:

$$f(x_i) = \frac{x_i^{x_i}}{e^{x_i} x_i!}$$

demostrar que el máximo de probabilidad condicionada para un determinado x_i disminuye a medida que se incrementa x_i , equivale a demostrar que $f(x_i+1) < f(x_i)$, es

decir, $\frac{(x_i+1)^{x_i+1}}{e^{x_i+1}(x_i+1)!} < \frac{x_i^{x_i}}{e^{x_i} x_i!}$ lo que equivale a

$$1 < e^{\left(\frac{x_i}{x_i+1}\right)^{x_i}} \quad (D.3)$$

Condición que se cumple para $x_i=1$.

Derivando respecto a x_i la parte derecha de la desigualdad (D.3) obtenemos

$$e^{\left(\frac{x_i}{x_i+1}\right)^{x_i}} \left[\left(\frac{1}{x_i+1}\right) + \ln x_i \right]$$

Expresión que es estrictamente positiva para $x_i \geq 1$. Por lo tanto, para $x_i \geq 1$, a medida que incrementamos x_i disminuye el valor máximo de la $P(x_i|t_i)$.

3º) A partir de la condición de máximo recogida por $x_i = A_i\lambda\rho^{t_i}$ podemos obtener el valor de t_i que permite obtener la máxima probabilidad para cada x_i . Supongamos que $A\lambda = a$, entonces

$$t_i = \frac{\ln x_i - \ln a}{\ln \rho} \quad (D.4)$$

Para comparar dos estructuras de distribución espacial obtenidas mediante el ajuste auto-Poisson a dos patrones de puntos, puede ser interesante analizar la evolución de las probabilidades condicionadas para cada x_i a medida que incrementamos dicho x_i . Llamemos t_0 y t_1 respectivamente, al t_i que nos permite obtener la máxima probabilidad condicionada dado un x_i al ajustar una auto-Poisson a dos patrones (el patrón 0 y el patrón 1 respectivamente) de puntos espaciales.

Considerando que $(t_1 - t_0) > 0$ y haciendo uso de (D.4), se tiene que:

$$(t_1 - t_0) = \left(\frac{\ln x_i - \ln a_1}{\ln \rho_1} - \frac{\ln x_i - \ln a_0}{\ln \rho_0} \right) \rightarrow \frac{\partial(t_1 - t_0)}{\partial x_i} = \left(\frac{1}{\ln \rho_1} - \frac{1}{\ln \rho_0} \right) \frac{1}{x_i} \quad (D.5)$$

De modo que si $(\rho_1 > \rho_0)$, $(t_1 - t_0)$ va disminuyendo a medida que incrementamos x_i , mientras que si $(\rho_1 < \rho_0)$, $(t_1 - t_0)$ se incrementa a medida que incrementamos x_i .

Apéndice E.

TABLA E.1. Resultados del ajuste de la función auto-Poisson a los datos de PIB regional de la UE (1980 y 2002). Cuadrícula m=160.

	Área(km ²)	ue80			ue02		
Grid 160	244,1406	LnV	ρ	σ	LnV	ρ	σ
Orden 1	976,5625	-24608	1,021451	0,000701	-24523	1,021152	0,0006704
Orden 2	1953,125	-23247	1,016996	0,000221	-23267	1,016442	0,0002301
Orden 3	5859,375	-21317	1,012279	6,85E-05	-21483	1,011724	0,0000643
Orden 4	11718,75	-20037	1,010122	4,18E-05	-20438	1,009387	0,0000401
Orden 5	19531,25	-19331	1,008531	3,01E-05	-19821	1,007806	0,000031
Orden 6	29296,88	-19136	1,00712	3,07E-05	-19629	1,00653	0,0000271
Orden 7	41015,63	-19354	1,005797	3,33E-05	-19762	1,005441	0,0000235
Orden 8	54687,5	-19699	1,004708	2,95E-05	-19992	1,004556	0,0000195
Orden 9	70312,5	-19976	1,003914	2,15E-05	-20199	1,003871	0,0000154
Orden 10	87890,63	-20203	1,003329	1,63E-05	-20432	1,003335	0,0000121
Orden 11	107421,9	-20388	1,00288	1,31E-05	-20673	1,002906	0,00001
Orden 12	128906,3	-20575	1,00251	1,16E-05	-20947	1,002537	0,0000093
Orden 13	152343,8	-20777	1,002203	1,06E-05	-21227	1,002223	0,0000091
Orden 14	177734,4	-20958	1,001951	0,000009	-21464	1,001965	0,0000087
Orden 15	205078,1	-21081	1,001749	7,7E-06	-21627	1,001757	0,0000074
Orden 16	234375	-21203	1,001578	6,7E-06	-21787	1,00158	0,0000062
Orden 17	265625	-21313	1,001433	6,8E-06	-21920	1,001431	0,0000058
Orden 18	298828,1	-21437	1,001309	5,9E-06	-22047	1,001306	0,0000057
Orden 19	333984,4	-21561	1,001203	5,7E-06	-22160	1,001199	0,0000048
Orden 20	371093,8	-21616	1,001117	5,1E-06	-22185	1,001115	0,0000052

TABLA E.2. Resultados del ajuste de la función auto-Poisson a los datos de PIB regional de la UE (1980 y 2002). Cuadrícula m=241.

	Área(km ²)	ue80			ue02		
Grid 241	107,6083	LnV	ρ	σ	LnV	ρ	σ
Orden 1	430,4334	-28779	1,039489	0,000822	-28643	1,039136	0,0007389
Orden 2	860,8667	-28270	1,024635	0,000272	-28110	1,024449	0,0002648
Orden 3	2582,6	-27041	1,015647	0,000109	-26963	1,015268	0,0001129
Orden 4	5165,2	-25951	1,01275	5,65E-05	-26013	1,012265	0,0000638
Orden 5	8608,667	-25020	1,011133	4,16E-05	-25282	1,01048	0,0000472
Orden 6	12913	-24337	1,009923	3,29E-05	-24735	1,009175	0,0000393
Orden 7	18078,2	-23912	1,00888	2,67E-05	-24374	1,008129	0,000037
Orden 8	24104,27	-23716	1,007918	2,69E-05	-24203	1,007224	0,0000343
Orden 9	30991,2	-23723	1,006999	2,98E-05	-24197	1,00642	0,0000288
Orden 10	38739	-23914	1,006109	3,28E-05	-24329	1,00569	0,0000257
Orden 11	47347,67	-24188	1,005304	3,11E-05	-24524	1,005043	0,0000236
Orden 12	56817,2	-24445	1,004634	2,72E-05	-24709	1,004492	0,0000204
Orden 13	67147,6	-24664	1,004093	2,16E-05	-24878	1,004029	0,000016
Orden 14	78338,87	-24853	1,003654	1,76E-05	-25046	1,003636	0,0000135
Orden 15	90391,01	-25013	1,003294	1,53E-05	-25220	1,003302	0,0000111
Orden 16	103304	-25153	1,002989	1,25E-05	-25395	1,003013	0,0000096
Orden 17	117077,9	-25289	1,002724	1,06E-05	-25585	1,002752	0,0000083
Orden 18	131712,6	-25428	1,002489	1,09E-05	-25783	1,002516	0,0000082
Orden 19	147208,2	-25576	1,002281	9,8E-06	-25983	1,002304	0,0000076
Orden 20	163564,7	-25719	1,002096	9,1E-06	-26168	1,002116	0,0000075

TABLA E.3. Resultados del ajuste de la función auto-Poisson a los datos de PIB regional de la UE (1980 y 2002). Cuadrícula m=482.

	Área(km ²)	ue80			ue02		
Grid 482	26,90209	LnV	ρ	σ	LnV	ρ	σ
Orden 1	107,6083	-40894	1,069077	0,002121	-40817	1,067646	0,0022574
Orden 2	215,2167	-40639	1,040256	0,000838	-40536	1,039442	0,0009605
Orden 3	645,65	-39509	1,023833	0,000197	-39359	1,023474	0,000205
Orden 4	1291,3	-38553	1,018668	0,000123	-38422	1,018324	0,0001218
Orden 5	2152,167	-37834	1,015927	9,66E-05	-37738	1,015542	0,00009
Orden 6	3228,25	-37208	1,014201	7,53E-05	-37160	1,013786	0,0000684
Orden 7	4519,55	-36637	1,013001	5,77E-05	-36660	1,012539	0,0000522
Orden 8	6026,067	-36112	1,0121	4,68E-05	-36229	1,011566	0,0000407
Orden 9	7747,8	-35640	1,011367	4,08E-05	-35857	1,010755	0,0000364
Orden 10	9684,751	-35233	1,010733	3,75E-05	-35540	1,010053	0,0000345
Orden 11	11836,92	-34893	1,010159	3,42E-05	-35270	1,009432	0,000032
Orden 12	14204,3	-34260	1,009626	3,18E-05	-35046	1,008874	0,0000307
Orden 13	16786,9	-34415	1,009119	2,96E-05	-34874	1,008364	0,0000291
Orden 14	19584,72	-34271	1,008632	2,88E-05	-34749	1,007891	0,0000286
Orden 15	22597,75	-34183	1,008157	2,81E-05	-34673	1,007445	0,0000284
Orden 16	25826	-34148	1,007693	2,91E-05	-34641	1,007023	0,0000286
Orden 17	29269,47	-34160	1,007237	2,93E-05	-34646	1,006625	0,0000274
Orden 18	32928,15	-34226	1,006784	3,09E-05	-34691	1,006244	0,0000266
Orden 19	36802,05	-34333	1,006339	0,000033	-34765	1,00588	0,000026
Orden 20	40891,17	-34468	1,005909	3,37E-05	-34858	1,005536	0,0000254
Orden 21	45195,5	-34618	1,005503	3,44E-05	-34962	1,005212	0,000025
Orden 22	49715,05	-34766	1,005132	3,27E-05	-35066	1,004912	0,0000229
Orden 23	54449,82	-34903	1,004796	3,01E-05	-35164	1,004637	0,0000206
Orden 24	59399,8	-35026	1,004495	0,000028	-35255	1,004384	0,0000193
Orden 25	64565	-35141	1,004224	2,55E-05	-35345	1,004152	0,0000175
Orden 26	69945,42	-35250	1,003981	2,26E-05	-35435	1,003938	0,0000154
Orden 27	75541,05	-35350	1,003762	2,04E-05	-35525	1,003741	0,0000148
Orden 28	81351,91	-35444	1,003563	1,85E-05	-35617	1,003559	0,0000126
Orden 29	87377,97	-35530	1,003382	1,63E-05	-35709	1,003392	0,0000117
Orden 30	93619,26	-35608	1,003217	1,49E-05	-35799	1,003236	0,0000105
Orden 31	100075,8	-35682	1,003065	1,34E-05	-35891	1,003093	0,0000096
Orden 32	106747,5	-35753	1,002923	1,31E-05	-35985	1,002955	0,0000093
Orden 33	113634,4	-35825	1,00279	1,15E-05	-36082	1,002824	0,0000089
Orden 34	120736,6	-35895	1,002666	1,12E-05	-36182	1,0027	0,0000077
Orden 35	128053,9	-35968	1,002548	1,05E-05	-36285	1,002581	0,0000087

TABLA E.4. Resultados del ajuste de la función auto-Poisson a los datos de PIB regional de la UE (1980 y 2002). Cuadrícula m=1206.

	Área(km ²)	ue80			ue02		
Grid 1206	4,297198	LnV	ρ	σ	LnV	ρ	σ
Orden 1	17,18879	-58631	1,202796	0,014589	-58486	1,212533	0,0182361
Orden 2	34,37759	-58373	1,110895	0,005756	-58281	1,115623	0,0060406
Orden 3	103,1328	-57803	1,054281	0,001281	-57631	1,055333	0,0013065
Orden 4	206,2655	-57282	1,037474	0,000575	-57163	1,036806	0,0006761
Orden 5	343,7759	-56837	1,029188	0,000327	-56714	1,028465	0,0003659
Orden 6	515,6638	-56370	1,024664	0,000204	-56216	1,024186	0,0002159
Orden 7	721,9293	-55915	1,021831	0,000137	-55743	1,021501	0,0001469
Orden 8	962,5724	-55501	1,019864	0,000108	-55328	1,019579	0,0001121
Orden 9	1237,593	-55134	1,018401	0,000096	-54972	1,018105	0,0000957
Orden 10	1546,991	-54807	1,017244	8,95E-05	-54657	1,016924	0,0000869
Orden 11	1890,767	-54512	1,016291	8,38E-05	-54373	1,015946	0,0000803
Orden 12	2268,921	-54238	1,015488	7,62E-05	-54111	1,015124	0,0000736
Orden 13	2681,452	-53982	1,014803	6,77E-05	-53862	1,014422	0,0000656
Orden 14	3128,36	-53735	1,014213	0,00006	-53640	1,013814	0,0000577
Orden 15	3609,647	-53498	1,013698	5,41E-05	-53426	1,01328	0,0000505
Orden 16	4125,31	-53268	1,013245	4,83E-05	-53224	1,012804	0,0000442
Orden 17	4675,352	-53046	1,012843	4,38E-05	-53035	1,012375	0,0000396
Orden 18	5259,771	-52831	1,01248	4,06E-05	-52856	1,011984	0,0000368
Orden 19	5878,567	-52622	1,012148	3,77E-05	-52688	1,011622	0,0000339
Orden 20	6531,742	-52424	1,011844	3,53E-05	-52530	1,011286	0,0000326
Orden 21	7219,293	-52235	1,01156	3,36E-05	-52382	1,010969	0,0000323
Orden 22	7941,223	-52057	1,011292	3,21E-05	-52242	1,010671	0,0000302
Orden 23	8697,529	-51899	1,011038	3,08E-05	-52111	1,010388	0,0000292
Orden 24	9488,214	-51732	1,010795	3,08E-05	-51989	1,010118	0,0000283
Orden 25	10313,28	-51587	1,010562	0,00003	-51876	1,009861	0,0000271
Orden 26	11172,72	-51453	1,010336	2,86E-05	-51769	1,009616	0,0000265
Orden 27	12066,53	-51327	1,010117	2,72E-05	-51669	1,009379	0,000026
Orden 28	12994,73	-51213	1,009903	2,63E-05	-51576	1,009155	0,0000248
Orden 29	13957,3	-51111	1,009694	2,46E-05	-51492	1,008937	0,0000249
Orden 30	14954,25	-51020	1,009489	2,35E-05	-51416	1,008727	0,0000246
Orden 31	15985,58	-50939	1,009287	2,28E-05	-51347	1,008524	0,0000244
Orden 32	17051,28	-50869	1,009089	2,17E-05	-51286	1,008328	0,0000249
Orden 33	18151,37	-50809	1,008894	2,15E-05	-51233	1,008137	0,0000253
Orden 34	19285,83	-50757	1,008701	2,15E-05	-51187	1,007952	0,0000246
Orden 35	20454,66	-50714	1,008509	2,16E-05	-51149	1,00777	0,0000247
Orden 36	21657,88	-50680	1,00832	2,15E-05	-51119	1,007593	0,0000245
Orden 37	22895,47	-50655	1,008132	2,21E-05	-51096	1,007419	0,000024
Orden 38	24167,44	-50639	1,007945	2,32E-05	-51080	1,007249	0,0000235
Orden 39	25473,79	-50630	1,007761	2,42E-05	-51071	1,007084	0,0000228
Orden 40	26814,52	-50628	1,007577	2,46E-05	-51066	1,006922	0,0000225
Orden 41	28189,62	-50633	1,007395	2,61E-05	-51068	1,006764	0,0000219
Orden 42	29599,1	-50648	1,007213	0,000027	-51077	1,006608	0,0000212
Orden 43	31042,96	-50672	1,007032	2,78E-05	-51092	1,006455	0,0000209
Orden 44	32521,2	-50703	1,006851	2,86E-05	-51113	1,006305	0,000021
Orden 45	34033,81	-50740	1,006671	2,89E-05	-51139	1,006157	0,0000206
Orden 46	35580,8	-50784	1,006494	0,00003	-51170	1,006012	0,0000197
Orden 47	37162,17	-50834	1,006317	3,03E-05	-51206	1,005869	0,0000194
Orden 48	38777,92	-50888	1,006143	3,15E-05	-51244	1,005729	0,0000196
Orden 49	40428,04	-50944	1,005972	3,15E-05	-51284	1,005592	0,0000195
Orden 50	42112,54	-51004	1,005805	3,11E-05	-51327	1,005459	0,0000199

TABLA E.5. Resultados del ajuste de la función auto-Poisson a los datos de PIB regional de la UE (1980 y 2002). Cuadrícula m=1410.

Grid 1410	Área(km ²)	ue80			ue02		
		LnV	ρ	σ	LnV	ρ	σ
Orden 1	12,57482	-61727	1,258248	0,023038	-61595	1,271952	0,0234541
Orden 2	25,14964	-61561	1,137719	0,00886	-61406	1,144509	0,0088745
Orden 3	75,44892	-61017	1,063811	0,001726	-60835	1,066001	0,001686
Orden 4	150,8978	-60507	1,043644	0,000805	-60355	1,043774	0,000861
Orden 5	251,4964	-60104	1,033587	0,000482	-59990	1,032921	0,0005037
Orden 6	377,2446	-59712	1,02787	0,000287	-59588	1,027239	0,0002777
Orden 7	528,1424	-59311	1,024341	0,000184	-59160	1,023891	0,00018
Orden 8	704,1899	-58923	1,021946	0,000137	-58751	1,021613	0,0001301
Orden 9	905,3871	-58563	1,020201	0,000116	-58386	1,019912	0,0001091
Orden 10	1131,734	-58239	1,018858	0,000105	-58064	1,018571	0,0000992
Orden 11	1383,23	-57946	1,017777	0,0001	-57777	1,017476	0,0000933
Orden 12	1659,876	-57678	1,016876	9,56E-05	-57518	1,016554	0,0000861
Orden 13	1961,672	-57431	1,016105	8,98E-05	-57282	1,015763	0,0000783
Orden 14	2288,617	-57197	1,015438	8,24E-05	-57063	1,015075	0,0000706
Orden 15	2640,712	-56975	1,014854	7,37E-05	-56857	1,014474	0,0000635
Orden 16	3017,957	-56762	1,014339	6,59E-05	-56662	1,013942	0,0000572
Orden 17	3420,351	-56555	1,013881	5,92E-05	-56476	1,013468	0,0000517
Orden 18	3847,895	-56355	1,013472	5,22E-05	-56300	1,01304	0,0000476
Orden 19	4300,589	-56161	1,013104	4,78E-05	-56131	1,012651	0,0000444
Orden 20	4778,432	-55972	1,01277	4,31E-05	-55971	1,012295	0,0000411
Orden 21	5281,424	-55789	1,012463	0,000392	-55819	1,011964	0,0000386
Orden 22	5809,567	-55611	1,01218	3,67E-05	-55673	1,011655	0,0000364
Orden 23	6362,859	-55440	1,011917	0,000035	-55534	1,011365	0,0000345
Orden 24	6941,301	-55275	1,011669	3,36E-05	-55403	1,01109	0,0000333
Orden 25	7544,892	-55117	1,011435	3,22E-05	-55278	1,01083	0,0000316
Orden 26	8173,633	-54967	1,011211	3,17E-05	-55160	1,01058	0,000031
Orden 27	8827,524	-54826	1,010997	0,000031	-55050	1,010342	0,0000298
Orden 28	9506,564	-54694	1,010791	3,01E-05	-54946	1,010113	0,0000286
Orden 29	10210,75	-54570	1,010591	2,94E-05	-54848	1,009893	0,0000273
Orden 30	10940,09	-54453	1,010396	2,76E-05	-54756	1,009682	0,0000257
Orden 31	11694,58	-54344	1,010207	2,74E-05	-54669	1,009478	0,0000258
Orden 32	12474,22	-54242	1,010023	2,69E-05	-54587	1,009282	0,0000256
Orden 33	13279,01	-54148	1,009841	2,61E-05	-54512	1,00909	0,0000253
Orden 34	14108,95	-54063	1,009663	2,52E-05	-54442	1,008906	0,0000247
Orden 35	14964,04	-53986	1,009488	2,47E-05	-54378	1,008727	0,0000248
Orden 36	15844,27	-53915	1,009317	2,42E-05	-54319	1,008554	0,0000248
Orden 37	16749,66	-53899	1,009146	2,47E-05	-54266	1,008385	0,0000249
Orden 38	17680,2	-53789	1,008979	2,41E-05	-54220	1,008219	0,0000247
Orden 39	18635,88	-53750	1,008812	2,43E-05	-54179	1,008058	0,0000254
Orden 40	19616,72	-53708	1,008648	2,44E-05	-54143	1,007901	0,0000254
Orden 41	20622,71	-53673	1,008485	2,47E-05	-54113	1,007745	0,0000255
Orden 42	21653,84	-53645	1,008323	2,52E-05	-54088	1,007594	0,0000253
Orden 43	22710,13	-53624	1,008162	2,59E-05	-54069	1,007445	0,0000257
Orden 44	23791,56	-53608	1,008003	2,65E-05	-54055	1,0073	0,000025
Orden 45	24898,14	-53598	1,007845	2,71E-05	-54047	1,007156	0,000025
Orden 46	26029,88	-53593	1,007687	2,72E-05	-54041	1,007016	0,0000242
Orden 47	27186,76	-53593	1,007531	2,84E-05	-54039	1,006879	0,0000243
Orden 48	28368,79	-53598	1,007376	2,83E-05	-54042	1,006744	0,0000241
Orden 49	29575,98	-53611	1,00722	2,97E-05	-54050	1,006611	0,0000234
Orden 50	30808,31	-53632	1,007065	3,05E-05	-54063	1,00648	0,0000231
Orden 51	32065,79	-53657	1,00691	3,03E-05	-54080	1,006351	0,0000232
Orden 52	33348,42	-53687	1,006756	3,13E-05	-54101	1,006223	0,0000228
Orden 53	34656,2	-53723	1,006602	3,19E-05	-54125	1,006098	0,0000222
Orden 54	35989,14	-53764	1,00645	3,17E-05	-54152	1,005974	0,0000228
Orden 55	37347,22	-53808	1,006299	0,000032	-54182	1,005852	0,0000224

TABLA E.6. Comparación de resultados con la distribución de puntos en cada región siguiendo el método normal y el método regular (cuadrícula m=160).

	ue80(n)	ue80(reg)		ue02(n)	ue02(reg)	
Grid 160	ρ	ρ	$\Delta\rho/\rho$	ρ	ρ	$\Delta\rho/\rho$
Orden 1	1,021451	1,02515	-0,00360845	1,021152	1,0238	-0,002586247
Orden 2	1,016996	1,01757	-0,00056458	1,016442	1,01696	-0,00050946
Orden 3	1,012279	1,01227	8,39697E-06	1,011724	1,01179	-6,49344E-05
Orden 4	1,010122	1,01016	-3,8113E-05	1,009387	1,00944	-5,21081E-05
Orden 5	1,008531	1,00859	-5,8498E-05	1,007806	1,00784	-3,38347E-05
Orden 6	1,00712	1,00718	-5,9672E-05	1,00653	1,00658	-4,96732E-05
Orden 7	1,005797	1,00585	-5,2493E-05	1,005441	1,0055	-5,85778E-05
Orden 8	1,004708	1,00475	-4,1801E-05	1,004556	1,00459	-3,41433E-05
Orden 9	1,003914	1,00395	-3,6257E-05	1,003871	1,0039	-2,87877E-05
Orden 10	1,003329	1,00335	-2,1428E-05	1,003335	1,00335	-1,53486E-05
Orden 11	1,00288	1,00289	-9,9712E-06	1,002906	1,00291	-3,58955E-06
Orden 12	1,00251	1,00252	-9,5759E-06	1,002537	1,00254	-3,29164E-06
Orden 13	1,002203	1,00221	-7,1841E-06	1,002223	1,00223	-7,48331E-06
Orden 14	1,001951	1,00196	-9,0822E-06	1,001965	1,00197	-4,99017E-06
Orden 15	1,001749	1,00175	-1,2977E-06	1,001757	1,00176	-2,8949E-06
Orden 16	1,001578	1,00158	-1,7972E-06	1,00158	1,00159	-9,58476E-06
Orden 17	1,001433	1,00144	-7,3894E-06	1,001431	1,00144	-8,68749E-06
Orden 18	1,001309	1,00131	-9,9869E-07	1,001306	1,00131	-4,29437E-06
Orden 19	1,001203	1,00121	-7,1913E-06	1,001199	1,0012	-6,99161E-07
Orden 20	1,001117	1,00112	-3,0965E-06	1,001115	1,00112	-4,99441E-06

FIGURA E.1. Ilustración del problema de no integrabilidad (datos UE 1980)

